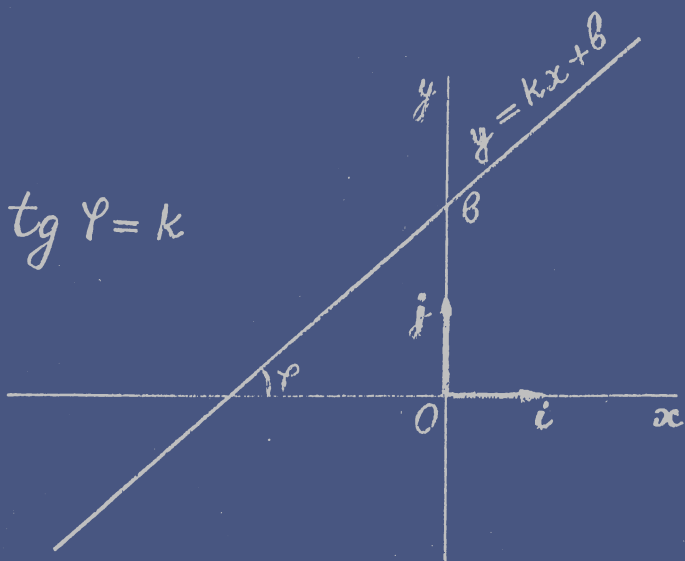
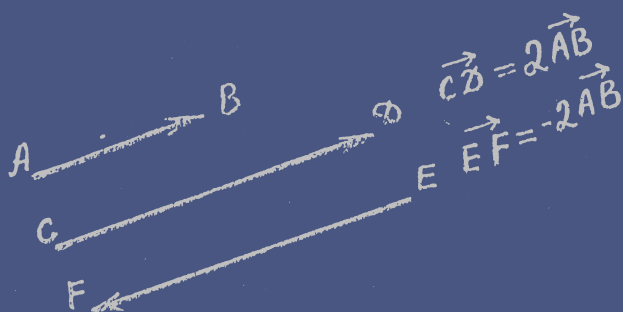
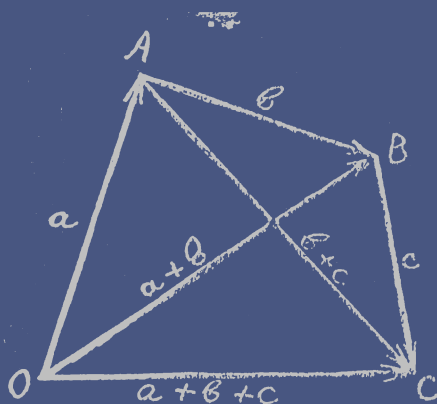
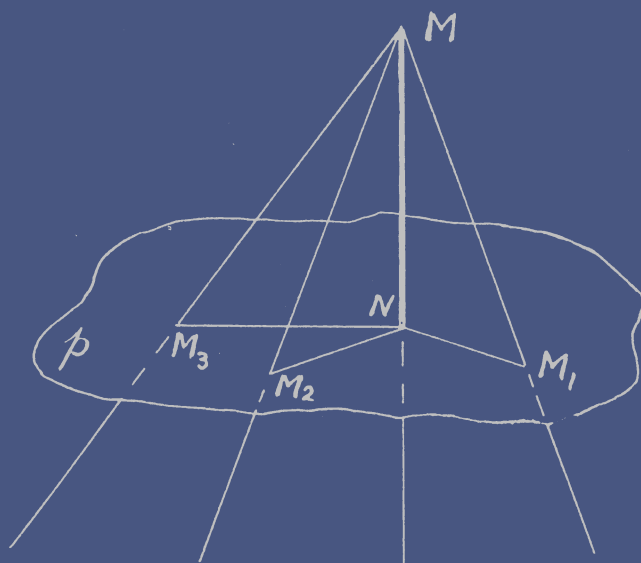
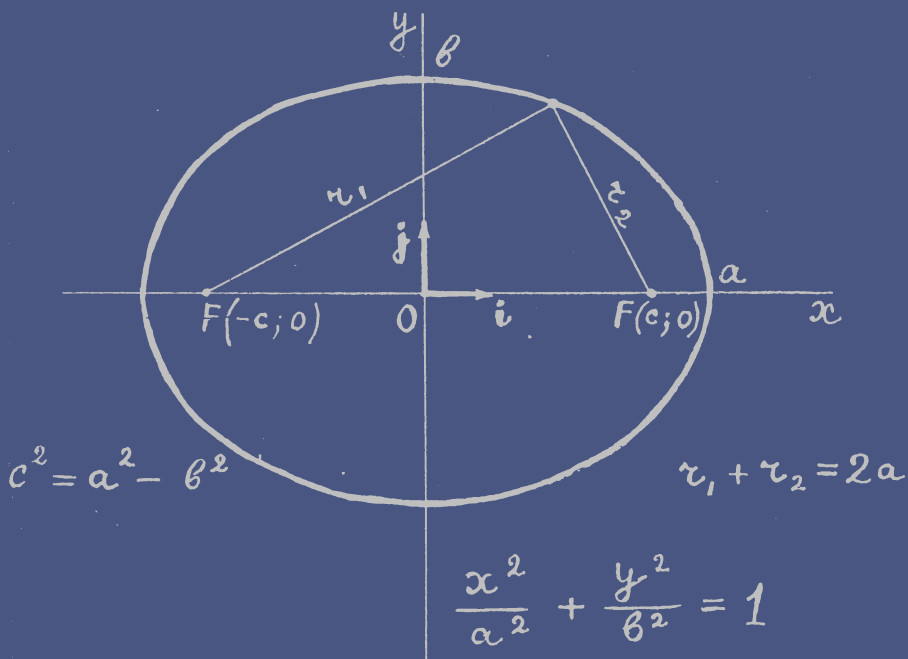


**Математика  
для  
техникумов**

**ГЕОМЕТРИЯ**





Математика  
для  
техникумов

---

# ГЕОМЕТРИЯ

3-е издание, переработанное

Под общей редакцией Г. Н. ЯКОВЛЕВА

*Допущено Государственным комитетом СССР  
по народному образованию в качестве учебника  
для средних специальных учебных заведений*



МОСКВА «НАУКА»  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
1989

ББК 22.151.0  
М36  
УДК 513(075.3)

**Математика для техникумов. Геометрия: Учебник**/М. И. Каченовский, Ю. М. Колягин, А. Д. Кутасов и др.; Под общ. ред. Г. Н. Яковлева.— 3-е изд., перераб.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989.— 320 с.— ISBN 5-02-013931-9.

Написана в соответствии с действующей программой по математике для средних специальных учебных заведений на базе неполной средней школы. Третье издание учебника (второе—1982 г.) существенно переработано с учетом замечаний и пожеланий преподавателей, работающих по этому учебнику. Многие главы написаны заново. Приведены вопросы для контроля и упражнения для самостоятельной работы учащихся.

**Авторы:** М. И. Каченовский, Ю. М. Колягин,  
А. Д. Кутасов, Г. Л. Луканкин, В. А. Оганесян, Г. Н. Яковлев

**Рецензент**  
преподаватель Ленинградского радиоаппаратостроительного техникума кандидат педагогических наук Л. Ю. Сергиенко

Учебное издание

**КАЧЕНОВСКИЙ** Мечислав Игнатьевич, **КОЛЯГИН** Юрий Михайлович,  
**КУТАСОВ** Александр Дмитриевич, **ЛУКАНИН** Геннадий Лаврович,  
**ОГАНЕСЯН** Вагган Арташесович, **ЯКОВЛЕВ** Геннадий Николаевич

## ГЕОМЕТРИЯ

Заведующий редакцией С. И. Зеленский  
Редактор Т. А. Панькова  
Художественный редактор Г. М. Коровина  
Технический редактор И. Ш. Аксельрод, Корректор Н. Б. Румянцева

ИБ № 32327

---

Сдано в набор 10.11.88. Подписано к печати 09.08.89. Формат 84×108/32. Бумага тип. № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 16,8. Усл. кр.-отт. 17,43. Уч.-изд. л. 17,27. Тираж 300000 экз. (1-й завод 1—100000 экз.). Заказ № 3369. Цена 75 коп.

---

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука».  
Главная редакция физико-математической литературы.  
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

---

Ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени МПО  
«Первая Образцовая типография» Государственного комитета СССР по печати.  
113054 Москва, Воровая, 28

Отпечатано в типографии издательства «Коммуна».  
г. Воронеж, пр. Революции, 39.

М  $\frac{1602010000-116}{053(02)-89}$  Св. вл. 3-89

ISBN 5-02-013931-9

© Издательство «Наука».  
Главная редакция  
физико-математической  
литературы, 1982;  
с изменениями, 1989

## ОГЛАВЛЕНИЕ

|                                                                                                                                                                                                                                                                                    |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Предисловие. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                               | 8  |
| Глава 1. Векторы на плоскости . . . . .                                                                                                                                                                                                                                            | 9  |
| § 1. Понятие вектора. Действия над векторами. . . . .                                                                                                                                                                                                                              | 9  |
| 1. Векторные и скалярные величины (9). 2. Векторы. Угол между векторами (10). 3. Сумма векторов (12). 4. Противоположные векторы. Разность векторов (15). 5. Умножение вектора на число (16). 6. Коллинеарные векторы (17).                                                        |    |
| Вопросы для контроля . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                     | 21 |
| Упражнения 1.1—1.18. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                       | 22 |
| § 2. Базис на плоскости. Координаты вектора . . . . .                                                                                                                                                                                                                              | 23 |
| 1. Разложение вектора на плоскости по двум неколлинеарным векторам (23). 2. Базис на плоскости. Координаты вектора (25). 3. Действия над векторами, заданными своими координатами (26). 4. Ортогональный базис. Длина вектора, заданного координатами в ортогональном базисе (27). |    |
| Вопросы для контроля . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                     | 28 |
| Упражнения 1.19—1.30 . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                     | 28 |
| § 3. Системы координат на плоскости. . . . .                                                                                                                                                                                                                                       | 29 |
| 1. Прямоугольная декартова система координат (29). 2*. Общая декартова система координат (31). 3. Переход от одной прямоугольной декартовой системы координат к другой (31). 4. Полярная система координат (35).                                                                   |    |
| Вопросы для контроля . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                     | 37 |
| Упражнения 1.31—1.42 . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                     | 38 |
| § 4. Скалярное произведение векторов . . . . .                                                                                                                                                                                                                                     | 39 |
| 1. Проекция вектора на ось и ее свойства (39). 2. Скалярное произведение двух векторов (41). 3. Свойства скалярного произведения векторов (42). 4. Скалярное произведение векторов, заданных своими координатами (43). 5. Вычисление угла между двумя векторами (44).              |    |
| Вопросы для контроля . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                     | 45 |
| Упражнения 1.43—1.54 . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                     | 45 |
| Глава 2. Уравнения прямых на плоскости . . . . .                                                                                                                                                                                                                                   | 47 |
| § 5. Способы задания прямой на плоскости. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки. . . . .                                                                                                                                                                             | 47 |
| 1. Уравнение с двумя переменными и его график (47). 2. Способы задания прямой на плоскости (48). 3. Параметрические уравнения прямой (49). 4. Каноническое уравнение прямой (50). 5. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки (51).                                     |    |
| Вопросы для контроля . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                     | 55 |
| Упражнения 2.1—2.26 . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                      | 55 |
| § 6. Общее уравнение прямой. . . . .                                                                                                                                                                                                                                               | 57 |
| 1. Уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору (57). 2. Общее уравнение прямой (59). 3. Уравнение прямой с угловым коэффициентом (63).                                                                                                         |    |
| Вопросы для контроля . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                     | 66 |
| Упражнения 2.27—2.61 . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                     | 66 |

|                                                                                                                                                                                                                                                      |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| § 7. Вычисление угла между прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых . . . . .                                                                                                                                                | 68  |
| 1. Прямые, заданные общими уравнениями (68). 2. Прямые, заданные уравнениями с угловыми коэффициентами (71). 3. Прямые, заданные каноническими уравнениями (73).                                                                                     |     |
| Вопросы для контроля . . . . .                                                                                                                                                                                                                       | 75  |
| Упражнения 2.62—2.79 . . . . .                                                                                                                                                                                                                       | 75  |
| § 8. Расстояние от точки до прямой . . . . .                                                                                                                                                                                                         | 77  |
| 1. Расстояние от точки до прямой (77). 2. Нормированное уравнение прямой (78). 3. Формула для расстояния от точки до прямой (80).                                                                                                                    |     |
| Вопросы для контроля . . . . .                                                                                                                                                                                                                       | 82  |
| Упражнения 2.80—2.90 . . . . .                                                                                                                                                                                                                       | 82  |
| Глава 3. Кривые второго порядка . . . . .                                                                                                                                                                                                            | 84  |
| § 9. Окружность и эллипс . . . . .                                                                                                                                                                                                                   | 84  |
| 1. Окружность (84). 2. Эллипс и его каноническое уравнение (86). 3. Исследование эллипса по его каноническому уравнению (90).                                                                                                                        |     |
| Вопросы для контроля . . . . .                                                                                                                                                                                                                       | 95  |
| Упражнения 3.1—3.51 . . . . .                                                                                                                                                                                                                        | 96  |
| § 10. Гипербола и парабола . . . . .                                                                                                                                                                                                                 | 99  |
| 1. Гипербола и ее каноническое уравнение (99). 2. Исследование гиперболы по ее каноническому уравнению (102). 3. Парабола и ее свойства (109).                                                                                                       |     |
| Вопросы для контроля . . . . .                                                                                                                                                                                                                       | 112 |
| Упражнения 3.52—3.79 . . . . .                                                                                                                                                                                                                       | 113 |
| § 11. Неканонические уравнения эллипса, гиперболы и параболы . . . . .                                                                                                                                                                               | 115 |
| 1. График уравнения $xu=a$ , $a \neq 0$ (115). 2. График уравнения $y=ax^2+bx+c$ , $a \neq 0$ (116). 3. График уравнения $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , $0 < a < b$ (118). 4*. Общее уравнение второго порядка с двумя переменными (121). |     |
| Вопросы для контроля . . . . .                                                                                                                                                                                                                       | 125 |
| Упражнения 3.80—3.104 . . . . .                                                                                                                                                                                                                      | 125 |
| Глава 4. Прямые и плоскости в пространстве . . . . .                                                                                                                                                                                                 | 128 |
| § 12. Начальные понятия стереометрии . . . . .                                                                                                                                                                                                       | 128 |
| 1. Основные аксиомы стереометрии (128). 2. Простейшие следствия из аксиом стереометрии (128). 3. Перпендикулярные прямые в пространстве (130).                                                                                                       |     |
| Вопросы для контроля . . . . .                                                                                                                                                                                                                       | 131 |
| Упражнения 4.1—4.7 . . . . .                                                                                                                                                                                                                         | 131 |
| § 13. Треугольные и многогранные углы. Пирамиды . . . . .                                                                                                                                                                                            | 131 |
| 1. Треугольные и многогранные углы (131). 2*. Свойства плоских углов многогранного угла (133). 3. Пирамиды (134).                                                                                                                                    |     |
| Вопросы для контроля . . . . .                                                                                                                                                                                                                       | 137 |
| Упражнения 4.8—4.10 . . . . .                                                                                                                                                                                                                        | 137 |
| § 14. Параллельность прямых в пространстве . . . . .                                                                                                                                                                                                 | 138 |
| 1. Параллельные и скрещивающиеся прямые в пространстве (138). 2. Параллельность трех прямых (139). 3. Углы с сонаправленными сторонами (140). 4. Угол между прямыми в пространстве (141).                                                            |     |
| Вопросы для контроля . . . . .                                                                                                                                                                                                                       | 142 |
| Упражнения 4.11—4.17 . . . . .                                                                                                                                                                                                                       | 143 |
| § 15. Параллельность прямых и плоскостей в пространстве. Призма. Параллелепипед . . . . .                                                                                                                                                            | 143 |

|          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |     |
|----------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
|          | 1. Параллельность прямой и плоскости (143). 2. Параллельность плоскостей (144). 3. Свойства параллельных сечений пирамиды. Усеченная пирамида (146). 4. Призма (148). 5. Параллелепипед и его свойства (151).                                                                                                                   |     |
|          | Вопросы для контроля . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 152 |
|          | Упражнения 4.18—4.32 . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 153 |
| § 16.    | Перпендикуляр и наклонная к плоскости . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 154 |
|          | 1. Перпендикулярность прямой и плоскости (154). 2. Перпендикуляр и наклонная (157). 3. Теорема о трех перпендикулярах (159). 4. Угол между прямой и плоскостью (160). 5. Высота пирамиды, усеченной пирамиды и призмы (162).                                                                                                    |     |
|          | Вопросы для контроля . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 164 |
|          | Упражнения 4.33—4.57 . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 165 |
| § 17.    | Двугранные углы. Перпендикулярность плоскостей . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                        | 166 |
|          | 1. Двугранные углы (166). 2. Перпендикулярные плоскости (168).                                                                                                                                                                                                                                                                  |     |
|          | Вопросы для контроля . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 169 |
|          | Упражнения 4.58—4.65 . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 169 |
| § 18.    | Ортогональная проекция фигур . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                          | 170 |
|          | 1. Проекция точки и проекция прямой (170). 2. Проекция фигуры (172). 3. Площадь проекции многоугольника (173).                                                                                                                                                                                                                  |     |
|          | Вопросы для контроля . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 174 |
|          | Упражнения 4.66—4.70 . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 175 |
| § 19*.   | Многогранники . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 175 |
|          | 1. Понятие о выпуклом многограннике и его поверхности (175). 2. Правильные многогранники (176).                                                                                                                                                                                                                                 |     |
|          | Вопросы для контроля . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 178 |
|          | Упражнения 4.71—4.73 . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 179 |
| Глава 5. | Векторы в пространстве . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 180 |
| § 20.    | Сложение векторов и умножение вектора на число . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                        | 180 |
|          | 1. Сумма и разность векторов (180). 2. Умножение вектора на число. Коллинеарные векторы (182). 3. Компланарные векторы. Разложение вектора по трем некомпланарным векторам (182).                                                                                                                                               |     |
|          | Вопросы для контроля . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 185 |
|          | Упражнения 5.1—5.3 . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 185 |
| § 21.    | Базисы и декартовы системы координат в пространстве . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                   | 186 |
|          | 1. Базис в пространстве. Координаты вектора (186). 2. Действия над векторами, заданными своими координатами (186). 3. Ортогональный базис. Длина вектора, заданного координатами в ортогональном базисе (187). 4. Прямоугольная декартова система координат (188).                                                              |     |
|          | Вопросы для контроля . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 189 |
|          | Упражнения 5.4—5.8 . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 189 |
| § 22.    | Скалярное произведение векторов . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 189 |
|          | 1. Проекция вектора на ось и ее свойства (189). 2. Скалярное произведение двух векторов (190). 3. Скалярное произведение векторов, заданных своими координатами (191).                                                                                                                                                          |     |
|          | Вопросы для контроля . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 191 |
|          | Упражнения 5.9—5.27 . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 192 |
| § 23.    | Векторное и смешанное произведение векторов . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                           | 193 |
|          | 1. Векторное произведение двух векторов и его свойства (193). 2. Векторное произведение двух векторов, заданных своими координатами (196). 3. Смешанное произведение трех векторов и его свойства (197). 4. Смешанное произведение трех векторов, заданных своими координатами (200). 5. Решение задач векторным методом (201). |     |
|          | Вопросы для контроля . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 204 |
|          | Упражнения 5.28—5.47 . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 204 |



|                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Глава 6*. Уравнения прямых и плоскостей в пространстве                                                                                                                                                                                                                                          | 206 |
| § 24. Уравнения плоскостей . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                            | 206 |
| 1. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору (206). 2. Общее уравнение плоскости (208). 3. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку параллельно двум данным векторам (209). 4. Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки (210). |     |
| Вопросы для контроля . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                  | 211 |
| Упражнения 6.1—6.5 . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                    | 212 |
| § 25. Взаимное расположение плоскостей . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                | 212 |
| 1. Условия параллельности и пересечения двух плоскостей (212). 2. Условие перпендикулярности двух плоскостей (213). 3. Угол между плоскостями (214).                                                                                                                                            |     |
| Вопросы для контроля . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                  | 215 |
| Упражнения 6.6—6.12. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                    | 215 |
| § 26. Уравнения прямых . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                | 216 |
| 1. Уравнение прямой, проходящей через данную точку параллельно данному вектору (216). 2. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки (218). 3. Прямая как пересечение двух плоскостей (219).                                                                                            |     |
| Вопросы для контроля . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                  | 221 |
| Упражнения 6.13—6.23 . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                  | 222 |
| § 27. Взаимное расположение прямых . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                    | 223 |
| 1. Условие принадлежности двух прямых одной плоскости. Скрещивающиеся прямые (223). 2. Условие параллельности двух прямых (224). 3. Условия перпендикулярности двух прямых (225). 4. Угол между прямыми (225).                                                                                  |     |
| Вопросы для контроля . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                  | 228 |
| Упражнения 6.24—6.31 . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                  | 228 |
| § 28. Взаимное расположение прямой и плоскости . . . . .                                                                                                                                                                                                                                        | 229 |
| 1. Условие параллельности прямой и плоскости (229). 2. Условие перпендикулярности прямой и плоскости (230). 3. Угол между прямой и плоскостью (231).                                                                                                                                            |     |
| Вопросы для контроля . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                  | 233 |
| Упражнения 6.32—6.38 . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                  | 233 |
| § 29. Расстояние от точки до плоскости и до прямой . . . . .                                                                                                                                                                                                                                    | 234 |
| 1. Расстояние от точки до плоскости (234). 2. Расстояние от точки до прямой (235). 3. Расстояние между скрещивающимися прямыми (236).                                                                                                                                                           |     |
| Вопросы для контроля . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                  | 237 |
| Упражнения 6.39—6.42 . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                  | 237 |
| Глава 7. Простейшие криволинейные поверхности и тела вращения . . . . .                                                                                                                                                                                                                         | 239 |
| § 30. Цилиндры и конусы . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                               | 239 |
| 1. Цилиндр (239). 2. Конус и усеченный конус (241).                                                                                                                                                                                                                                             |     |
| Вопросы для контроля . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                  | 244 |
| Упражнения 7.1—7.14 . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                   | 244 |
| § 31. Шар и сфера . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                     | 245 |
| 1. Определения и основные свойства (245). 2. Уравнение сферы (248).                                                                                                                                                                                                                             |     |
| Вопросы для контроля . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                  | 251 |
| Упражнения 7.15—7.37 . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                  | 251 |
| § 32*. Простейшие криволинейные поверхности . . . . .                                                                                                                                                                                                                                           | 253 |
| 1. Поверхности вращения (253). 2. Цилиндрические поверхности (258). 3. Конические поверхности (264).                                                                                                                                                                                            |     |
| Вопросы для контроля . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                  | 265 |
| Упражнения 7.38—7.52 . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                  | 266 |

|                                                                                                                                                                        |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Глава 8. Объемы тел и площади поверхностей . . . . .                                                                                                                   | 267 |
| § 33. Объем прямой призмы и прямого цилиндра. . . . .                                                                                                                  | 267 |
| 1. Объем прямого параллелепипеда (267). 2. Объем прямой призмы (270). 3. Объем прямого цилиндра (271).                                                                 |     |
| Вопросы для контроля . . . . .                                                                                                                                         | 273 |
| Упражнения 8.1—8.37. . . . .                                                                                                                                           | 273 |
| § 34. Объем пирамиды . . . . .                                                                                                                                         | 276 |
| 1. Вычисление объема тела по площадям его параллельных сечений (276). 2. Объем пирамиды (278). 3. Объем усеченной пирамиды (280).                                      |     |
| Вопросы для контроля . . . . .                                                                                                                                         | 280 |
| Упражнения 8.38—8.52 . . . . .                                                                                                                                         | 281 |
| § 35. Объемы тел вращения . . . . .                                                                                                                                    | 282 |
| 1. Формула для объема тела вращения (282). 2. Объем прямого кругового конуса (283). 3. Объем шара и его частей (285).                                                  |     |
| Вопросы для контроля . . . . .                                                                                                                                         | 289 |
| Упражнения 8.53—8.90 . . . . .                                                                                                                                         | 289 |
| § 36*. Вычисление объемов произвольных призм, цилиндров и конусов . . . . .                                                                                            | 291 |
| 1. Объем произвольного цилиндра (291). 2. Объем произвольного конуса (293).                                                                                            |     |
| Вопросы для контроля . . . . .                                                                                                                                         | 294 |
| Упражнения 8.91—8.97 . . . . .                                                                                                                                         | 295 |
| § 37. Площади поверхностей . . . . .                                                                                                                                   | 295 |
| 1. Площадь поверхности многогранника (295). 2. Площадь поверхности цилиндра и конуса (298). 3. Площадь поверхности вращения (300). 4. Площадь сферы и ее частей (302). |     |
| Вопросы для контроля . . . . .                                                                                                                                         | 304 |
| Упражнения 8.98—8.132 . . . . .                                                                                                                                        | 304 |
| Ответы . . . . .                                                                                                                                                       | 307 |

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга является учебником по курсу «Геометрия» для средних специальных учебных заведений на базе неполной средней школы. Она написана в соответствии с действующей программой по математике для техникумов. В учебнике выдержана должная преемственность в содержании, терминологии и символике с курсом математики средней школы.

Третье издание учебника существенно переработано с учетом замечаний преподавателей и методистов, работающих по этому учебнику. Многие главы написаны заново. Изменено распределение материала по главам, параграфам и пунктам. В конце каждого параграфа приведены вопросы для контроля и упражнения для самостоятельной работы учащихся. В новом издании учебника сначала рассматриваются только векторы на плоскости, а векторы в пространстве изучаются после главы «Прямые и плоскости в пространстве».

Изложение теоретического материала сопровождается разбором разнообразных задач. Начало и конец доказательства отмечаются знаками  $\square$  и  $\blacksquare$ , а начало и конец решения каждой задачи — знаками  $\triangle$  и  $\blacktriangle$ . Материал, выходящий за рамки обязательной программы, помечен звездочкой.

Авторы благодарят всех, кто письменно или устно высказал свои замечания и пожелания. Сердечная благодарность официальному рецензенту кандидату педагогических наук Л. Ю. Сергиенко.

## § 1. Понятие вектора. Действия над векторами

1. **Векторные и скалярные величины.** В механике, физике, во многих технических науках изучаются величины разного рода. Одни величины (длина, площадь, объем, масса, плотность, температура и т. д.) при выбранной единице измерения вполне характеризуются одним числовым значением. Такие величины называются *скалярными* (числовыми).

Другие величины (сила, скорость, ускорение и т. д.) определяются не только числовым значением, но и направлением в пространстве. Такие величины называются *векторными*.

Векторную величину геометрически изображают с помощью отрезка определенной длины и определенного направления. При этом длина отрезка при выбранной единице масштаба равна числовому значению векторной величины, а направление отрезка совпадает с направлением этой величины. Например, пусть в точке  $O$  приложены две силы  $F_1$  и  $F_2$  (рис. 1). Величины этих сил равны, но они имеют разные направления, и поэтому на рисунке они изображены двумя разными направленными отрезками  $\vec{OA_1}$  и  $\vec{OA_2}$  одинаковой длины.

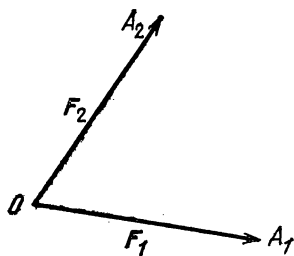


Рис. 1

Если же величина силы  $F_1$  больше величины силы  $F_2$ , то длина отрезка  $\vec{OA_1}$ , изображающего силу  $F_1$ , должна быть соответственно больше длины отрезка  $\vec{OA_2}$ , изображающего силу  $F_2$  (рис. 2).

Из механики известно, что силы, приложенные в одной точке, складываются по *правилу параллелограмма*. Напри-

мер, действие сил  $F_1$  и  $F_2$ , приложенных в точке  $O$ , равносильно действию силы  $F$ , которая на рисунке изображается направленной диагональю  $\vec{OA}$  параллелограмма  $OA_1AA_2$  (рис. 3), построенного на направленных отрезках  $\vec{OA_1}$  и  $\vec{OA_2}$ . В этом случае пишут  $F = F_1 + F_2$ .

Вообще, для изучения векторных величин удобно пользоваться направленными отрезками, для которых по соот-

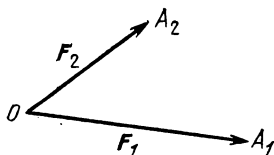


Рис. 2

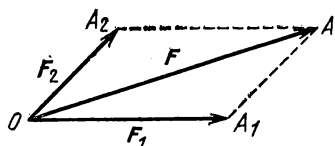


Рис. 3

ветствующим правилам введено понятие равенства и определены операции сложения и умножения на число. Такие направленные отрезки называют *векторами*.

**2. Векторы. Угол между векторами.** Любой отрезок прямой имеет две концевые точки. Если одна из них принята за начало отрезка, а другая — за конец, то такой отрезок называется *направленным*.

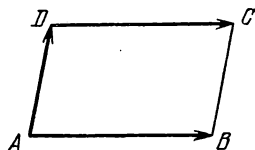


Рис. 4

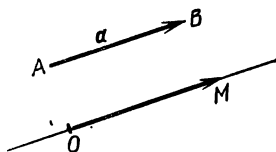


Рис. 5

Направленные отрезки обычно обозначаются двумя буквами со стрелкой, например,  $\vec{AB}$ ,  $\vec{BA}$ ,  $\vec{OA}$ ,  $\vec{OB}$  и т. д., где первая буква обозначает начало отрезка, а вторая — конец отрезка.

Два направленных отрезка считаются *равными*, если они имеют равные длины, параллельны и направлены в одну сторону. Например, на рис. 4, где  $ABCD$  — параллелограмм, направленные отрезки  $\vec{AB}$  и  $\vec{DC}$  равны, так как  $AB = DC$ ,  $AB \parallel DC$  и отрезки  $\vec{AB}$  и  $\vec{DC}$  направлены в одну сторону. Для обозначения того, что направленные отрезки  $\vec{AB}$  и  $\vec{DC}$  одинаково направлены, употребляется запись  $\vec{AB} \parallel \vec{DC}$ .

Направленные отрезки  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{AD}$  не являются равными, так как они не параллельны. Направленные отрезки  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{CD}$  тоже не являются равными, так как они имеют противоположные направления, хотя они параллельны и имеют равные длины.

Направленные отрезки, для которых определено равенство указанным выше образом, называются *векторами* (или *свободными векторами*). В следующих параграфах для векторов будут введены операции сложения, вычитания и умножения на число.

Если вектор, изображенный на рис. 4 направленным отрезком  $\overrightarrow{AB}$ , обозначить  $\mathbf{a}$ , то по определению  $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ .

*Длиной вектора* называется длина отрезка, который изображает данный вектор. Так что длина вектора  $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$  — это длина отрезка  $AB$ . Длина вектора  $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$  обозначается  $|\mathbf{a}|$  или  $|\overrightarrow{AB}|$ . Направление, определяемое лучом  $AB$ , называется *направлением вектора*  $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$ .

Вектор, у которого начало совпадает с концом, называется *нулевым вектором* и обозначается  $\mathbf{0}$ . Так что по определению  $\mathbf{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB}$ . Нулевой вектор направления не имеет, а его длина равна нулю.

*От любой точки можно отложить вектор, равный данному.*

□ Действительно, пусть заданы ненулевой вектор  $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$  и точка  $O$  (рис. 5).

Через точку  $O$  проведем прямую, параллельную прямой  $AB$ , и от точки  $O$  отложим направленный отрезок  $\overrightarrow{OM}$  такой, что  $OM = AB$  и  $\overrightarrow{OM} \uparrow \overrightarrow{AB}$ . Тогда  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$ .

Для нулевого вектора это утверждение очевидно, так как у него начало совпадает с концом. ■

*Углом между двумя ненулевыми векторами* называется угол между равными им векторами с общим началом. Например, угол между векторами  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  — это угол  $AOB$  между векторами  $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$  и  $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$  (рис. 6).

Угол между одинаково направленными векторами считается равным нулю.

Угол между векторами  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  будем обозначать  $\angle(\mathbf{a}; \mathbf{b})$ . Заметим, что если векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  имеют одно и то же направление, то  $\angle(\mathbf{a}; \mathbf{b}) = 0^\circ$ , а если они имеют противоположные направления, то  $\angle(\mathbf{a}; \mathbf{b}) = 180^\circ$ .

Если угол между векторами равен  $90^\circ$ , то эти векторы называются *ортогональными* (или *перпендикулярными*). Если векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  ортогональны, то будем писать  $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ .

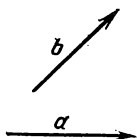


Рис. 6

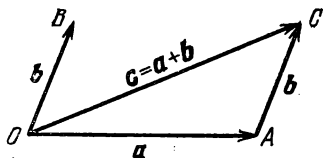
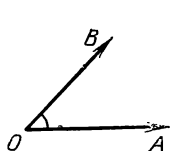


Рис. 7

Вектор называется *единичным*, если его длина равна единице измерения.

3. Сумма векторов. Пусть даны два вектора  $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$  и  $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$  (рис. 7). От точки A отложим отрезок AC такой,

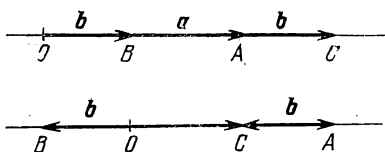


Рис. 8

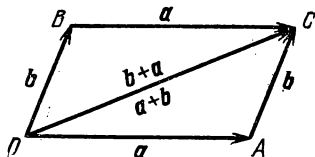


Рис. 9

что  $\overrightarrow{AC} = \mathbf{b}$ . Тогда вектор  $\mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$  называется *суммой векторов*  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  и обозначается  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ . Нахождение суммы векторов называется действием *сложения* векторов.

Таким образом,  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}$ . Это равенство называют *правилом треугольника* сложения двух векторов. Очевидно, что это правило справедливо и в том случае, когда точки O, A и B лежат на одной прямой (рис. 8). В частности,  $\mathbf{a} + 0 = \mathbf{a}$ .

Сложение векторов обладает следующими свойствами:

1. Свойство *переместительности* (коммутативности): для любых векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}. \quad (1)$$

2. Свойство *сочетательности* (ассоциативности): для любых векторов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}). \quad (2)$$

□ 1. Пусть  $\mathbf{a} = \vec{OA}$ ,  $\mathbf{b} = \vec{OB}$ . Рассмотрим случай, когда точки  $O$ ,  $A$  и  $B$  не лежат на одной прямой. На отрезках  $OA$  и  $OB$  построим параллелограмм  $OACB$  (рис. 9). Тогда  $OA = BC$ ,  $OA \parallel BC$  и  $OB = AC$ ,  $OB \parallel AC$ , как противоположные стороны параллелограмма. Заметим, что лучи  $OA$  и  $BC$  имеют одинаковое направление, а также одинаково направлены лучи  $OB$  и  $AC$ . Следовательно,  $\mathbf{a} = \vec{OA} = \vec{BC}$ ,  $\mathbf{b} = \vec{OB} = \vec{AC}$ . Поэтому

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{OC}, \quad \mathbf{b} + \mathbf{a} = \vec{OB} + \vec{BC} = \vec{OC},$$

что и доказывает равенство (1).

Для случая, когда точки  $O$ ,  $A$ ,  $B$  лежат на одной прямой, доказательство равенства (1) проведите самостоятельно.

2. От некоторой точки  $O$  отложим вектор  $\vec{OA} = \mathbf{a}$ , от точки  $A$  отложим вектор  $\vec{AB} = \mathbf{b}$  и, наконец, от точки  $B$

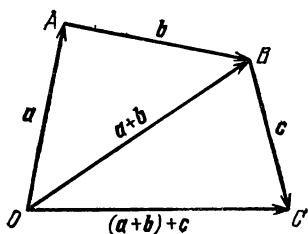


Рис. 10

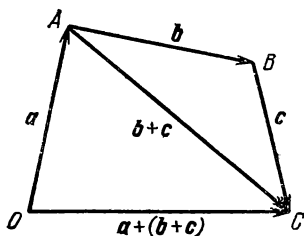


Рис. 11

отложим вектор  $\vec{BC} = \mathbf{c}$  (рис. 10, 11). Соединим точки  $O$  и  $C$  отрезком  $OC$ . Тогда, с одной стороны (см. рис. 10),

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \vec{OA} + \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{OB} + \vec{BC} = \vec{OC},$$

и, с другой стороны (см. рис. 11),

$$\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \vec{OA} + (\vec{AB} + \vec{BC}) = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{OC},$$

что и доказывает равенство (2). ■

Из рис. 9 видно, что сумма векторов  $\mathbf{a} = \vec{OA}$  и  $\mathbf{b} = \vec{OB}$  равна направленной диагонали  $\vec{OC}$  параллелограмма  $OACB$ , построенного на отрезках  $OA$  и  $OB$ , т. е.

$$\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OC}.$$



Это равенство называется *правилом параллелограмма* сложения двух векторов.

Так как сложение векторов ассоциативно, то сумма трех и большего числа векторов записывается без скобок. Например, вместо  $(a + b) + c$  или  $a + (b + c)$  пишут  $a + b + c$ .

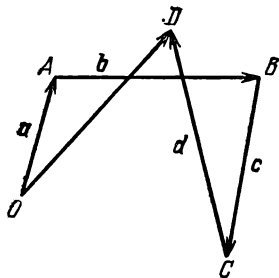


Рис. 12

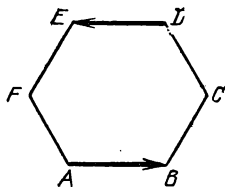


Рис. 13

Если требуется найти сумму трех или большего числа векторов, то применяют так называемое *правило многоугольника*. Оно состоит в следующем.

Пусть даны векторы  $a, b, c, d$  и требуется найти их сумму.

Выберем некоторую точку  $O$  (рис. 12) и построим отрезок  $OA$  такой, что  $\vec{OA} = a$ , затем построим отрезок  $AB$  такой, что  $\vec{AB} = b$ , и т. д. Построение продолжается до тех пор, пока не будут исчерпаны все заданные векторы. Результирующий вектор  $\vec{OD}$  будет равен сумме данных векторов.

**Задача 1.** Найти сумму  $\vec{KD} + \vec{MC} + \vec{DM} + \vec{CK}$ .

Δ Применяя свойство коммутативности сложения векторов, получаем, что данная сумма равна сумме

$$\vec{KD} + \vec{DM} + \vec{MC} + \vec{CK}.$$

По правилу многоугольника находим, что эта сумма равна нулевому вектору  $\vec{KK}$ . Следовательно,

$$\vec{KD} + \vec{MC} + \vec{DM} + \vec{CK} = 0. \blacktriangle$$

**Задача 2.** Задан правильный шестиугольник  $ABCDEF$ . Найти сумму векторов  $\vec{AB}$  и  $\vec{DE}$ .

Δ В правильном шестиугольнике  $ABCDEF$  (рис. 13)  $AB = DE$  и  $AB \parallel DE$ . Кроме того,  $\vec{DE} \uparrow \vec{BA}$  и поэтому

$\vec{DE} = \vec{BA}$ . Следовательно,

$$\vec{AB} + \vec{DE} = \vec{AB} + \vec{BA} = \vec{0}. \blacktriangle$$

**4. Противоположные векторы. Разность векторов.** Два вектора называются *противоположными*, если их сумма равна нулевому вектору. Вектор, противоположный вектору  $\mathbf{a}$ , обозначается  $-\mathbf{a}$ . Следовательно, по определению  $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \vec{0}$ .

Из определения следует, что если  $\mathbf{a} = \vec{AB}$ , то  $-\mathbf{a} = \vec{BA}$ , т. е. противоположные векторы имеют одинаковую длину

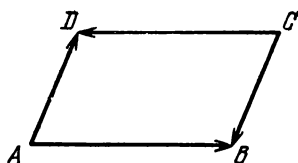


Рис. 14

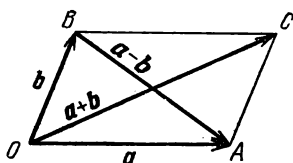


Рис. 15

и противоположные направления. Для обозначения того, что векторы противоположно направлены, используются следующие записи:  $\mathbf{a} \updownarrow (-\mathbf{a})$  и  $\vec{AB} \updownarrow \vec{BA}$ . Например, если  $ABCD$  — параллелограмм, то векторы  $\vec{AB}$  и  $\vec{CD}$  противоположные, т. е.  $\vec{AB} \updownarrow \vec{CD}$  (рис. 14). Векторы  $\vec{AD}$  и  $\vec{CB}$  тоже противоположные, т. е.  $\vec{AD} \updownarrow \vec{CB}$ .

Для любых двух векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  вектор  $\mathbf{c} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$  называется *разностью векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$*  и обозначается  $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ . Таким образом, по определению

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}).$$

Если  $\mathbf{a} = \vec{OA}$  и  $\mathbf{b} = \vec{OB}$  (рис. 15), то  $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \vec{OA} - \vec{OB} = \vec{OA} + \vec{BO} = \vec{BO} + \vec{OA} = \vec{BA}$ . Следовательно,

$$\vec{OA} - \vec{OB} = \vec{BA}. \quad (1)$$

Из рисунка видно, что  $\vec{BA}$  — это направленная диагональ параллелограмма  $OACB$ , построенного на отрезках  $OA$  и  $OB$ , которая и изображает разность векторов  $\vec{OA}$  и  $\vec{OB}$ .

Другая направленная диагональ  $\overrightarrow{OC}$  изображает сумму векторов  $\overrightarrow{OA}$  и  $\overrightarrow{OB}$ .

Нетрудно заметить, что формулу (1) можно применять, не прибегая к чертежу: для этого достаточно внимательно проследить за порядком расположения букв в записи данных и искомого векторов. Так, например,

$$\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{PN} = \overrightarrow{NQ}. \quad (2)$$

**Задача.** Дан четырехугольник  $ABCD$  такой, что  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ . Доказать, что  $ABCD$  — параллелограмм.

$\Delta$  По формуле (2) имеем  $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ . Тогда  $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ , и поэтому  $BC = AD$  и  $BC \parallel AD$ . Отсюда следует, что  $ABCD$  — параллелограмм (рис. 16).  $\blacktriangle$

**5. Умножение вектора на число.** Произведением ненулевого вектора  $a$  на число  $x \neq 0$  называется вектор, длина

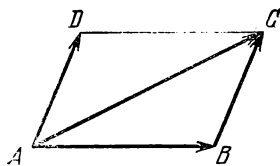


Рис. 16

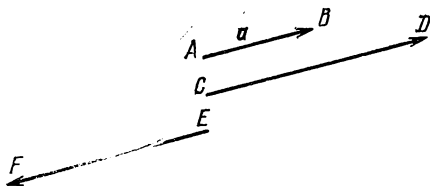


Рис. 17

которого равна  $|x| \cdot |a|$ , а направление совпадает с направлением  $a$ , если  $x > 0$ , и противоположно ему, если  $x < 0$ . Произведением нулевого вектора на любое число  $x$  называется нулевой вектор. Произведением любого вектора на нуль также называется нулевой вектор.

Произведение вектора  $a$  на число  $x$  обозначается  $x \cdot a$  (числовой множитель пишется слева). Согласно определению  $|x \cdot a| = |x| \cdot |a|$  для любого вектора  $a$  и любого числа  $x$ .

На рис. 17 изображены произведения вектора  $a$  на число  $x=2$  (вектор  $\overrightarrow{CD}$ ) и на число  $x=-2$  (вектор  $\overrightarrow{EF}$ ).

Умножение вектора на число обладает следующими свойствами:

1. Свойство *сочетательности* (ассоциативности):

$$x \cdot (y \cdot a) = (x \cdot y) \cdot a.$$

2. Свойство *распределительности* (дистрибутивности) относительно векторного множителя:

$$x \cdot a + y \cdot a = (x + y) \cdot a.$$

3. Свойство *распределительности* (дистрибутивности) относительно числового множителя:

$$x \cdot a + x \cdot b = x \cdot (a + b).$$

□ Если  $a = 0$  или  $xy = 0$ , то равенство  $x(ya) = (xy)a$  очевидно, так как слева и справа стоят нулевые векторы.

Пусть  $a \neq 0$ ,  $xy \neq 0$  и  $a = \vec{OA}$ . Тогда векторы  $x(y \cdot \vec{OA})$  и  $(xy) \vec{OA}$  лежат на прямой  $OA$ , имеют длину  $|x| \cdot |y| \cdot OA$  и направлены в одну сторону:

в сторону вектора  $a = \vec{OA}$ , если  $xy > 0$ , и в противоположную ему сторону, если  $xy < 0$ . Таким образом, свойство 1 доказано. ■

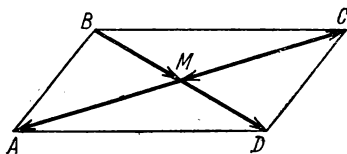


Рис. 18

Свойства 2 и 3 докажете самостоятельно.

**Задача.** В параллелограмме  $ABCD$  точка  $M$  есть точка пересечения диагоналей. Найти множитель  $k$  в каждом из следующих случаев:

- 1)  $\vec{MC} = k \cdot \vec{CA}$ ; 2)  $\vec{BD} = k \cdot \vec{BM}$ ; 3)  $\vec{AC} = k \cdot \vec{CM}$ ;
- 4)  $\vec{BB} = k \cdot \vec{BD}$ ; 5)  $\vec{AA} = k \cdot \vec{CC}$ .

△ Используя свойство диагоналей параллелограмма и определение умножения вектора на число, имеем (рис. 18):

$$1) \vec{MC} \uparrow \vec{CA}, CA = 2MC, \text{ откуда } k = -\frac{1}{2};$$

$$2) \vec{BM} \uparrow \vec{BD}, BD = 2BM, \text{ откуда } k = 2;$$

$$3) \vec{CM} \uparrow \vec{AC}, CM = \frac{1}{2} AC, \text{ откуда } k = -2;$$

$$4) \vec{BB} = 0, \quad \vec{BD} \neq 0, \quad \text{откуда } k = 0;$$

$$5) \vec{AA} = 0, \quad \vec{CC} = 0, \quad \text{откуда } k \text{ — любое число. } \blacktriangle$$

**6. Коллинеарные векторы.** Два ненулевых вектора называются *коллинеарными*, если их направления совпадают или противоположны.

Так, например, на рис. 17 векторы  $\vec{AB}$ ,  $\vec{CD}$  и  $\vec{EF}$  коллинеарны, а векторы  $\vec{AB}$  и  $\vec{AC}$  на рис. 16 неколлинеарны.

Если векторы  $a$  и  $b$  коллинеарны, то говорят также, что вектор  $a$  коллинеарен вектору  $b$ , а вектор  $b$  коллинеарен вектору  $a$ .

По определению нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.

**Теорема (признак коллинеарности).** *Для того чтобы вектор  $a$  был коллинеарен ненулевому вектору  $b$ , необходимо и достаточно, чтобы существовало число  $k$ , удовлетворяющее условию*

$$a = kb. \quad (1)$$

□ **Достаточность.** Если при некотором  $k$  равенство (1) выполняется, то векторы  $b$  и  $a$  коллинеарны по определению умножения вектора на число и определению коллинеарных векторов.

**Необходимость.** Пусть вектор  $a$  коллинеарен ненулевому вектору  $b$ . Возможны следующие три случая:  $a \uparrow\uparrow b$ ,  $a \downarrow\downarrow b$ ,  $a = 0$ .

Если  $a \uparrow\uparrow b$ , то  $a = \frac{|a|}{|b|} \cdot b$ , т. е. равенство (1) выполняется при  $k = \frac{|a|}{|b|}$ . Если  $a \downarrow\downarrow b$ , то  $a = -\frac{|a|}{|b|} \cdot b$ , т. е. равенство (1) выполняется при  $k = -\frac{|a|}{|b|}$ . Если  $a = 0$ , то  $a = 0 \cdot b$ , т. е. равенство (1) выполняется при  $k = 0$ . ■

**Задача 1.** Доказать, что векторы  $\vec{AB} + \vec{CB} + 2\vec{BA}$  и  $\frac{1}{3}\vec{AC}$  коллинеарны.

△ Используя свойства действий над векторами, получаем

$$\begin{aligned} \vec{AB} + \vec{CB} + 2\vec{BA} &= (\vec{AB} + \vec{BA}) + (\vec{CB} + \vec{BA}) = \\ &= 0 + \vec{CA} = \vec{CA} = -\vec{AC}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\vec{AB} + \vec{CB} + 2\vec{BA} = -3 \left( \frac{1}{3} \vec{AC} \right).$$

По признаку коллинеарности векторов данные в условии задачи векторы коллинеарны. ▲

**Задача 2.** В треугольнике  $AOB$  точка  $M$  делит отрезок  $AB$  в отношении  $m:n$ . Выразить вектор  $\vec{OM}$  через векторы  $\vec{OA}$  и  $\vec{OB}$ . Рассмотреть также случай, когда  $M$  — середина отрезка  $AB$ .

△ Очевидно, что точка  $M$  делит отрезок  $AB$  (рис. 19) в отношении  $m:n$  тогда и только тогда, когда выполняется равенство:

$$n\vec{AM} = m\vec{MB}.$$

А так как  $\vec{AM} = \vec{OM} - \vec{OA}$  и  $\vec{MB} = \vec{OB} - \vec{OM}$ , то отсюда для  $\vec{OM}$  получаем векторное уравнение:

$$n(\vec{OM} - \vec{OA}) = m(\vec{OB} - \vec{OM}),$$

из которого находим

$$\vec{OM} = \frac{n}{m+n} \vec{OA} + \frac{m}{m+n} \vec{OB}.$$

В частности, если  $M$  — середина отрезка  $AB$ , то

$$\vec{OM} = \frac{1}{2} (\vec{OA} + \vec{OB}). \blacktriangle$$

**Задача 3.** Доказать, что отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, параллелен основаниям.

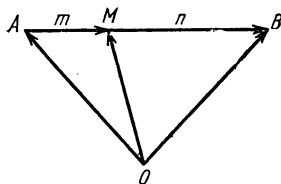


Рис. 19

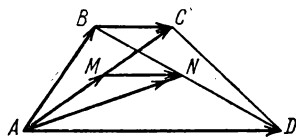


Рис. 20

△ Пусть точки  $M$  и  $N$  — середины диагоналей трапеции  $ABCD$  (рис. 20). Докажем, что  $MN \parallel AD$ . Для этого докажем, что векторы  $\vec{MN}$  и  $\vec{AD}$  коллинеарны.

Так как точка  $M$  — середина отрезка  $AC$ , то

$$\vec{AM} = \frac{1}{2} \vec{AC} = \frac{1}{2} (\vec{AB} + \vec{BC}).$$

А так как  $N$  — середина отрезка  $BD$ , то (см. предыдущую задачу)

$$\vec{AN} = \frac{1}{2} (\vec{AB} + \vec{AD}).$$

Поэтому

$$\vec{MN} = \vec{AN} - \vec{AM} = \frac{1}{2} (\vec{AD} - \vec{BC}).$$

Векторы  $\vec{AD}$  и  $\vec{BC}$  коллинеарны, так как отрезки  $AD$  и  $BC$  — основания трапеции. Поэтому существует число  $k$  такое, что  $\vec{BC} = k\vec{AD}$ . Тогда

$$\vec{MN} = \frac{1}{2} (1 - k) \vec{AD},$$

т. е. векторы  $\vec{MN}$  и  $\vec{AD}$  коллинеарны.

Следовательно, отрезок  $MN$  параллелен основаниям трапеции.  $\blacktriangle$

Задача 4. Доказать, что медианы любого треугольника  $ABC$  пересекаются в одной точке  $M$  такой, что:

1) точка  $M$  делит каждую медиану в отношении  $2 : 1$ , считая от вершины треугольника;

2) для любой точки  $O$  плоскости справедливо соотношение

$$\vec{OM} = \frac{1}{3} (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}).$$

$\triangle$  Пусть точка  $M$  делит медиану  $AD$  треугольника  $ABC$  в отношении  $2 : 1$  (рис. 21). Тогда по формуле из

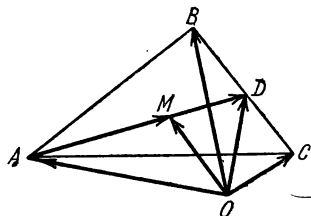


Рис. 21

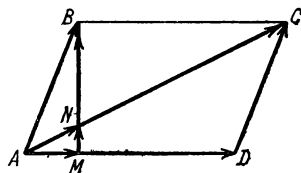


Рис. 22

задачи 2 при  $m = 2$ ,  $n = 1$  получаем

$$\vec{OM} = \frac{1}{3} \vec{OA} + \frac{2}{3} \vec{OD}.$$

Точка  $D$  — середина отрезка  $BC$ , поэтому

$$\vec{OD} = \frac{1}{2} (\vec{OB} + \vec{OC}).$$

Следовательно,

$$\vec{OM} = \frac{1}{3} (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}).$$

Тот же результат получится и для другой медианы треугольника  $ABC$ . Следовательно, точка  $M$  является общей для всех трех медиан.  $\blacktriangle$

**Задача 5.** На стороне  $AD$  и диагонали  $AC$  параллелограмма  $ABCD$  взяты точки  $M$  и  $N$  так, что  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{5} \overrightarrow{AD}$  и  $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{6} \overrightarrow{AC}$ . Доказать, что точки  $M$ ,  $N$  и  $B$  лежат на одной прямой.

△ Чтобы убедиться в том, что точки  $M$ ,  $N$  и  $B$  лежат на одной прямой, докажем, что векторы  $\overrightarrow{MN}$  и  $\overrightarrow{MB}$  коллинеарны (рис. 22).

С одной стороны,

$$\overrightarrow{MB} = -\frac{1}{5} \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}.$$

С другой стороны,

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \frac{1}{6} \overrightarrow{AC} - \frac{1}{5} \overrightarrow{AD} = \frac{1}{6} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) - \frac{1}{5} \overrightarrow{AD}.$$

А так как  $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ , то

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{6} \overrightarrow{AB} - \frac{1}{30} \overrightarrow{AD}.$$

Следовательно, векторы  $\overrightarrow{MN}$  и  $\overrightarrow{MB}$  коллинеарны, так как  $\overrightarrow{MB} = 6\overrightarrow{MN}$ . ▲

### Вопросы для контроля

1. Чем отличается векторная величина от скалярной? Приведите примеры скалярных и векторных величин.

2. В чем состоит правило параллелограмма сложения двух сил, приложенных в одной точке?

3. Какой отрезок называется направленным? В каком случае два направленных отрезка считаются равными?

4. Что называется вектором?

5. Что называется длиной и направлением вектора?

6. Какой вектор называется нулевым? Имеет ли он направление?

7. Как от заданной точки отложить вектор, равный данному?

8. Что называется углом между двумя векторами?

9. Какой вектор называется суммой двух данных векторов? Сформулируйте правило треугольника сложения двух векторов.

10. Какие свойства сложения векторов вы знаете?

11. Сформулируйте правило параллелограмма сложения двух векторов.

12. В чем состоит правило многоугольника сложения нескольких векторов?



13. Какие два вектора называются противоположными?
14. Какой вектор называется разностью двух векторов?
15. Что называется произведением вектора на число?
16. Какие свойства умножения вектора на число вы знаете?
17. Какие два вектора называются коллинеарными? Сформулируйте признак коллинеарности.

### Упражнения

1.1. На точку действуют две силы  $F_1$  и  $F_2$ . Найдите величину их равнодействующей, если

- 1)  $|F_1| = 8$  Н,  $|F_2| = 6$  Н и  $\angle(F_1; F_2) = 90^\circ$ ;
- 2)  $|F_1| = 3$  Н,  $|F_2| = 2$  Н и  $\angle(F_1; F_2) = 45^\circ$ ;
- 3)  $|F_1| = a$ ,  $|F_2| = b$  и  $\angle(F_1; F_2) = \alpha$ .

1.2. Пусть  $O$  — центр квадрата  $ABCD$ . Найдите сумму векторов  $\vec{OA}$ ,  $\vec{OB}$ ,  $\vec{OC}$ ,  $\vec{OD}$ . Найдите угол между векторами  $\vec{OA}$  и  $\vec{OB}$ .

1.3. Пусть  $O$  — центр окружности, описанной около правильного треугольника  $ABC$ . Найдите сумму векторов  $\vec{OA}$ ,  $\vec{OB}$ ,  $\vec{OC}$ . Найдите угол между векторами  $\vec{OA}$  и  $\vec{OB}$ .

1.4. К точке  $M$  плоскости приложены три силы  $\vec{MA}$ ,  $\vec{MB}$ ,  $\vec{MC}$  такие, что точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  являются вершинами равностороннего треугольника. Докажите, что равнодействующая этих сил равна  $3\vec{MO}$ , где  $O$  — центр окружности, описанной около треугольника  $ABC$ .

1.5. Пусть  $O$  — центр правильного  $n$ -угольника  $A_1A_2\dots A_n$ . Найдите сумму векторов  $\vec{OA}_1$ ,  $\vec{OA}_2$ , ...,  $\vec{OA}_n$ .

1.6. К точке  $M$  плоскости приложены  $n$  сил  $\vec{MA}_1$ ,  $\vec{MA}_2$ , ...,  $\vec{MA}_n$  такие, что  $A_1A_2\dots A_n$  — правильный  $n$ -угольник. Докажите, что равнодействующая этих сил равна  $n \cdot \vec{MO}$ , где  $O$  — центр многоугольника.

1.7. Докажите, что из медиан любого треугольника можно построить треугольник.

1.8. Найдите значения  $k$ , при которых длина вектора  $ka$  ( $a \neq 0$ ): 1) равна длине вектора  $a$ ; 2) больше длины вектора  $a$ ; 3) меньше длины вектора  $a$ ; 4) больше  $|3a|$ ; 5) меньше  $|5a|$ .

1.9. Определите число, на которое нужно умножить ненулевой вектор  $a$ , чтобы получить вектор  $b$  такой, что: 1)  $|b| = 5$  и  $a \uparrow b$ ; 2)  $|b| = 1$  и  $a \uparrow b$ ; 3)  $|b| = \frac{1}{3}$  и  $a \uparrow b$ .

1.10. На прямой взяты последовательно три точки  $M$ ,  $N$ ,  $P$ ; точка  $A$  является серединой отрезка  $MN$ , а точка  $B$  — серединой отрезка  $NP$ . Выразите вектор  $\vec{AB}$  через вектор  $\vec{PM}$ .

1.11. Точки  $M$  и  $N$  являются серединами сторон  $AB$  и  $CD$  четырехугольника  $ABCD$ . Докажите, что  $\vec{MN} = \frac{1}{2}(\vec{BC} + \vec{AD})$ .

1.12. Пусть  $O$  — некоторая точка плоскости. Докажите, что точка  $M$  лежит на отрезке  $AB$  тогда и только тогда, когда вы-

полнено равенство  $\overrightarrow{OM} = \alpha \overrightarrow{OA} + \beta \overrightarrow{OB}$ , где  $\alpha \geq 0$ ,  $\beta \geq 0$ ,  $\alpha + \beta = 1$ . В каком отношении точка  $M$  делит отрезок  $AB$ ?

1.13. Докажите, что если диагонали четырехугольника в точке пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник — параллелограмм.

1.14. На сторонах  $AB$  и  $AC$  треугольника  $ABC$  взяты точки  $M$  и  $N$  так, что  $AM : MB = m : n$ ,  $AN : NC = p : q$ . Найдите отношения  $BO : ON$  и  $CO : OM$ , где  $O$  — точка пересечения отрезков  $BN$  и  $CM$ .

1.15. Точки  $M$  и  $N$  лежат на боковых сторонах  $AB$  и  $BC$  равнобедренного треугольника  $ABC$  так, что  $AM = m \cdot BM$  и  $CN = n \cdot BN$ . Найдите отношение  $DO : BO$ , где  $O$  — точка пересечения прямой  $MN$  и высоты  $BD$  треугольника.

1.16. Докажите, что средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна полусумме оснований (теорема о средней линии трапеции).

1.17. Докажите, что если в четырехугольнике отрезок, соединяющий середины противоположных сторон, равен полусумме двух других его сторон, то этот четырехугольник — трапеция.

1.18. Точки  $M$  и  $N$  являются серединами сторон  $AB$  и  $CD$  четырехугольника  $ABCD$ . Докажите, что  $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD})$ .

## § 2. Базис на плоскости. Координаты вектора

1. Разложение вектора на плоскости по двум неколлинеарным векторам. Говорят, что вектор  $\mathbf{m}$  разложен по векторам  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , если он представлен в виде суммы

$$\mathbf{m} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b},$$

где  $x$  и  $y$  — некоторые числа. В этом случае говорят также, что вектор  $\mathbf{m}$  представлен в виде линейной комбинации векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ .

Теорема. Любой вектор на плоскости может быть разложен, и притом единственным образом, по любым двум неколлинеарным векторам.

□ Пусть векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  неколлинеарны. Если вектор  $\mathbf{m}$  коллинеарен, например, вектору  $\mathbf{a}$ , то по признаку коллинеарности существует число  $x$  такое, что  $\mathbf{m} = x\mathbf{a}$ . Поэтому  $\mathbf{m} = x \cdot \mathbf{a} + 0 \cdot \mathbf{b}$ , т. е. вектор  $\mathbf{m}$  разложен по векторам  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ . Аналогично доказывается, что если вектор  $\mathbf{m}$  коллинеарен вектору  $\mathbf{b}$ , то существует число  $y$  такое, что  $\mathbf{m} = y\mathbf{b} = 0 \cdot \mathbf{a} + y \cdot \mathbf{b}$ .

Пусть вектор  $\mathbf{m}$  не коллинеарен ни вектору  $\mathbf{a}$ , ни вектору  $\mathbf{b}$ . Отложим векторы  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{m}$  от одной точки  $O$ :  $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$ ,  $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$ ,  $\mathbf{m} = \overrightarrow{OM}$  (рис. 23).

Через точку  $M$  проведем прямые  $ME$  и  $MF$ , параллельные прямым  $OB$  и  $OA$ . Тогда  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}$ , причем

вектор  $\vec{OE}$  коллинеарен вектору  $\mathbf{a}$ , а вектор  $\vec{OF}$  — вектору  $\mathbf{b}$ . По признаку коллинеарности векторов существуют числа  $x$  и  $y$  такие, что  $\vec{OE} = x\mathbf{a}$ ,  $\vec{OF} = y\mathbf{b}$ . Следовательно,

$$\mathbf{m} = \vec{OM} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b}.$$

Докажем единственность такого разложения. Пусть имеется другое разложение

$$\mathbf{m} = x_1\mathbf{a} + y_1\mathbf{b},$$

у которого, например,  $x_1 \neq x$ . Тогда

$$(x_1 - x)\mathbf{a} + (y_1 - y)\mathbf{b} = \mathbf{0},$$

и поэтому

$$\mathbf{a} = -\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \mathbf{b}.$$

Последнее равенство невозможно, так как векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  неколлинеарны. Следовательно,  $x_1 = x$  и  $y_1 = y$ . ■

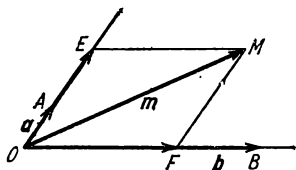


Рис. 23

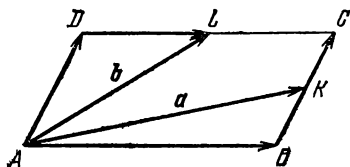


Рис. 24

Задача. Точки  $K$  и  $L$  — середины сторон  $BC$  и  $CD$  параллелограмма  $ABCD$ . Разложить вектор  $\vec{BC}$  по векторам  $\mathbf{a} = \vec{AK}$  и  $\mathbf{b} = \vec{AL}$ .

△ Из △  $AKB$  (рис. 24) имеем

$$\vec{AB} + \frac{\vec{BC}}{2} = \mathbf{a}. \quad (1)$$

Из △  $ADL$  получаем  $\vec{AD} + \vec{DL} = \mathbf{b}$ . Так как  $\vec{AD} = \vec{BC}$ ,  $\vec{DL} = \frac{\vec{AB}}{2}$ , то

$$\vec{BC} + \frac{\vec{AB}}{2} = \mathbf{b}. \quad (2)$$

Из равенства (1) следует

$$\frac{\vec{AB}}{2} + \frac{\vec{BC}}{4} = \frac{\mathbf{a}}{2}, \quad \text{или} \quad \frac{\vec{AB}}{2} = \frac{\mathbf{a}}{2} - \frac{\vec{BC}}{4}. \quad (3)$$

Подставив  $\frac{\vec{AB}}{2}$  из (3) в (2), получим

$$\vec{BC} + \frac{\mathbf{a}}{2} - \frac{\vec{BC}}{4} = \mathbf{b}, \quad \text{или} \quad \frac{3}{4} \vec{BC} = \mathbf{b} - \frac{\mathbf{a}}{2}$$

и, следовательно,

$$\vec{BC} = \frac{4}{3} \mathbf{b} - \frac{2}{3} \mathbf{a} = -\frac{2}{3} \mathbf{a} + \frac{4}{3} \mathbf{b}. \quad \blacktriangle$$

**2. Базис на плоскости. Координаты вектора.** Любые два неколлинеарные вектора на плоскости, взятые в определенном порядке, называются *базисом* (или *векторным базисом*) на этой плоскости.

Если векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  неколлинеарны, то из них на плоскости можно образовать два базиса  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  и  $\mathbf{b}, \mathbf{a}$ . У базиса  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  вектор  $\mathbf{a}$  — *первый базисный вектор*, а вектор  $\mathbf{b}$  — *второй базисный вектор*; у базиса  $\mathbf{b}, \mathbf{a}$  — наоборот.

Используя понятие базиса, теорему, доказанную в п. 1, можно сформулировать следующим образом:

*любой вектор на плоскости имеет, и притом единственное, разложение по базису.*

Это утверждение называется *теоремой о разложении вектора по базису*.

Пусть на плоскости задан некоторый базис  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ . Тогда по теореме о разложении вектора по базису для любого вектора  $\mathbf{a}$  на плоскости существуют числа  $a_1$  и  $a_2$  такие, что

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2.$$

Числа  $a_1$  и  $a_2$  называются *координатами вектора  $\mathbf{a}$  в данном базисе*;  $a_1$  — *первая координата*,  $a_2$  — *вторая координата*. В этом случае пишут  $\mathbf{a} = (a_1; a_2)$ .

**Задача.** В треугольнике  $ABC$  точка  $D$  — середина стороны  $BC$ , а  $BM$  — медиана. Найти координаты вектора  $\vec{BM}$  в базисе  $\mathbf{e}_1 = \vec{BA}$ ,  $\mathbf{e}_2 = \vec{BD}$ .

$\triangle$  Построим треугольник  $ABC$  до параллелограмма  $ABCN$  (рис. 25). Тогда  $\vec{BN} = 2\vec{BM}$  и

$$\vec{BN} = \vec{BA} + \vec{BC} = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2.$$

Следовательно,

$$\vec{BM} = \frac{1}{2} \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2,$$

и поэтому  $\vec{BM} = \left(\frac{1}{2}; 1\right)$  в данном базисе.  $\blacktriangle$

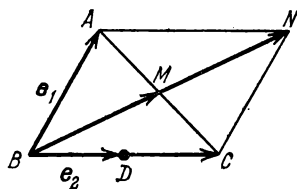


Рис. 25

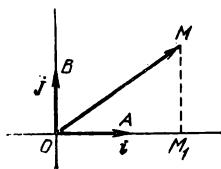


Рис. 26

**3. Действия над векторами, заданными своими координатами.** Если векторы на плоскости заданы своими координатами в некотором базисе  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ , то действия над ними выполняются по следующим правилам:

1. При сложении двух (или большего числа) векторов их соответственные координаты складываются, т. е. если  $\mathbf{a} = (a_1; a_2)$ ,  $\mathbf{b} = (b_1; b_2)$ , то

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2).$$

2. При вычитании векторов их соответственные координаты вычитаются, т. е.

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2).$$

3. При умножении вектора на число все его координаты умножаются на число, т. е.

$$k\mathbf{a} = (ka_1; ka_2).$$

$\square$  Действительно,

$$\begin{aligned} \mathbf{a} + \mathbf{b} &= (a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2) + (b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2) = \\ &= (a_1 + b_1)\mathbf{e}_1 + (a_2 + b_2)\mathbf{e}_2 = (a_1 + b_1; a_2 + b_2). \end{aligned}$$

Второе и третье правило докажите самостоятельно.  $\blacksquare$

**Задача.** Найти координаты векторов  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ ,  $5\mathbf{a}$ ,  $3\mathbf{b} + \frac{\mathbf{a}}{2}$ , если  $\mathbf{a} = (-4; 6)$ ,  $\mathbf{b} = (1; -1)$ .

△ По правилам 1, 2 и 3 получаем

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (-4 + 1; 6 - 1) = (-3; 5),$$

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (-4 - 1; 6 + 1) = (-5; 7),$$

$$5\mathbf{a} = (-20; 30),$$

$$3\mathbf{b} + \frac{\mathbf{a}}{2} = (3; -3) + (-2; 3) = (1; 0). \blacktriangle$$

**4. Ортогональный базис.** Длина вектора, заданного координатами в ортогональном базисе. Базис на плоскости называется *ортогональным* (или *прямоугольным декартовым*), если его векторы единичные и ортогональные. Единичные векторы такого базиса обозначают обычно буквами  $\mathbf{i}$  и  $\mathbf{j}$  и называют *ортами*. Координаты вектора в этом базисе обозначают буквами  $x$  и  $y$  с разными индексами. Например, запись  $\mathbf{a} = (x; y)$  означает, что  $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ .

В дальнейшем, если нет никаких пояснений, под словами «вектор имеет координаты  $x$  и  $y$ » подразумевается, что  $x, y$  — координаты этого вектора в некотором ортогональном базисе.

**Теорема.** Если вектор  $\mathbf{a}$  в некотором ортогональном базисе имеет координаты  $x$  и  $y$ , то

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (1)$$

□ Пусть  $x, y$  — координаты вектора  $\mathbf{a}$  в ортогональном базисе  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ :  $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ . Отложим векторы  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  и  $\mathbf{a}$  от некоторой точки  $O$ :  $\vec{OA} = \mathbf{i}$ ,  $\vec{OB} = \mathbf{j}$ ,  $\vec{OM} = \mathbf{a}$ . Прямые  $OA$  и  $OB$  являются перпендикулярными. На рис. 26 прямая  $OA$  нарисована горизонтально, прямая  $OB$  — вертикально, вектор  $\mathbf{i}$  направлен слева направо, а вектор  $\mathbf{j}$  — снизу вверх.

Пусть точка  $M$  не лежит ни на прямой  $OA$ , ни на прямой  $OB$ . Пусть в этом случае точка  $M_1$  — основание перпендикуляра, опущенного из точки  $M$  на прямую  $OA$ . Тогда

$$\begin{aligned} \vec{OM} &= \vec{OM_1} + \vec{M_1M}, & \vec{OM_1} &= x\mathbf{i}, & \vec{M_1M} &= y\mathbf{j}, \\ |\vec{OM_1}| &= |x|, & |\vec{M_1M}| &= |y|. \end{aligned}$$

Из прямоугольного треугольника  $OMM_1$  находим

$$OM^2 = x^2 + y^2.$$

Если точка  $M$  лежит на прямой  $OA$ , то  $\vec{OM} = x\vec{i}$ ,  $|\vec{OM}| = |x|$ ,  $y = 0$ . Если же  $M \in OB$ , то  $|\vec{OM}| = |y|$ ,  $x = 0$ . Следовательно, формула (1) доказана для всех случаев. ■

**Задача.** Пусть вектор  $\mathbf{a}$  имеет координаты  $x=2$ ,  $y=1$  в базисе  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ . Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{i}$ .

△ Отложим векторы  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  и  $\mathbf{a}$  от точки  $O$ :  $\mathbf{i} = \vec{OA}$ ,  $\mathbf{j} = \vec{OB}$  и  $\mathbf{a} = \vec{OM}$  (см. рис. 26). Тогда из прямоугольного треугольника  $OMM_1$  находим

$$\cos \angle(\mathbf{a}; \mathbf{i}) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}. \blacktriangle$$

### Вопросы для контроля

1. Что означают выражения «вектор разложен по двум данным векторам», «вектор представлен в виде линейной комбинации двух данных векторов»?
2. Всякий ли вектор на плоскости можно разложить по двум данным векторам?
3. Что называется базисом на плоскости?
4. Сформулируйте теорему о разложении вектора по базису.
5. Что называется координатами вектора в данном базисе?
6. Как выражаются координаты суммы и разности векторов и произведения вектора на число через координаты данных векторов?
7. Какой базис на плоскости называется ортогональным? Как называются его векторы?
8. Как выражается длина вектора через его координаты в ортогональном базисе?

### Упражнения

1.19. Векторы  $\vec{BC}, \vec{CB}, \vec{BD}, \vec{AD} + \vec{CD}$ , где  $A, B, C, D$  — вершины прямоугольника  $ABCD$ , представьте в виде линейной комбинации векторов  $\mathbf{a} = \vec{DB}$  и  $\mathbf{b} = \vec{AC}$ .

1.20. Векторы  $\vec{BD}, \vec{OB}, \vec{AC}$  и  $\vec{CO}$ , где  $O$  — точка пересечения диагоналей параллелограмма  $ABCD$ , разложите по векторам  $\mathbf{a} = \vec{AB}$  и  $\mathbf{b} = \vec{AD}$ .

1.21. В равнобедренной трапеции  $ABCD$  угол  $BAD$  равен  $60^\circ$ ,  $AB = BC = 2$ . Точки  $M$  и  $N$  — середины сторон  $BC$  и  $CD$ . Разложите векторы  $\vec{AB}, \vec{CD}, \vec{BC}, \vec{AM}, \vec{AN}$  и  $\vec{MN}$  по единичным векторам  $\mathbf{m}$  и  $\mathbf{n}$ :  $\mathbf{m} \uparrow \vec{AB}$  и  $\mathbf{n} \uparrow \vec{AD}$ .

1.22. На окружности с центром  $O$  даны точки  $A$  и  $B$ . Касательные к окружности в этих точках пересекаются в точке  $C$ . Разложите вектор  $\vec{OC}$  по векторам  $\vec{OA}$  и  $\vec{OB}$ , если

- 1)  $\angle AOB = 60^\circ$ ; 2)  $\angle AOB = 90^\circ$ .

1.23. Принимая за базисные векторы  $\vec{AB}$  и  $\vec{AC}$ , найдите в этом базисе координаты векторов  $\vec{AM}$ ,  $\vec{AO}$ ,  $\vec{MO}$ , где  $M$  — середина отрезка  $AB$ , а  $O$  — точка пересечения медиан треугольника  $ABC$ .

1.24. В треугольнике  $ABC$  точки  $M$ ,  $N$ ,  $P$  — середины сторон  $BC$ ,  $AC$ ,  $AB$ . Взяв за базис векторы  $e_1 = \vec{AB}$ ,  $e_2 = \vec{AC}$ , найдите координаты векторов  $\vec{AM}$ ,  $\vec{BN}$ ,  $\vec{CP}$ .

1.25. Дан правильный шестиугольник  $ABCDEF$ . Взяв за базис векторы  $e_1 = \vec{AF}$  и  $e_2 = \vec{AC}$ , найдите координаты векторов  $\vec{AB}$ ,  $\vec{BC}$ ,  $\vec{CD}$ ,  $\vec{DE}$ ,  $\vec{EF}$ ,  $\vec{AD}$ ,  $\vec{AE}$ ,  $\vec{FC}$ ,  $\vec{DB}$ ,  $\vec{BE}$ .

1.26. В треугольнике  $ABC$  проведена биссектриса  $AD$ . Найдите координаты вектора  $\vec{AD}$  в базисе, образованном векторами  $\vec{AB}$  и  $\vec{AC}$ .

1.27. Пусть вектор  $a$  в базисе  $e_1, e_2$  имеет координаты 2 и 1. Найдите координаты вектора  $a$ :

1) в базисе  $e'_1 = e_2, e'_2 = e_1$ ;

2) в базисе  $e'_1 = -e_1, e'_2 = e_2$ .

1.28. Даны векторы  $a = (3; -1)$ ,  $b = (1; 4)$  и  $c = (0; -3)$ . Найдите координаты векторов  $2a - b - 2c$ ,  $a - b - 3c$ ,  $a + 2b + 3c$ ,  $a - b - c$ ,  $\frac{1}{2}(a + b)$ ,  $\frac{1}{3}(a - 2b + c)$ .

1.29. Найдите длину вектора, который в ортогональном базисе имеет координаты:

1)  $(1; 2)$ ; 2)  $(-2; 1)$ ; 3)  $(3; 3)$ .

1.30. Найдите длину вектора, который имеет координаты  $(1; 2)$  в базисе  $e_1, e_2$ , у которого  $|e_1| = |e_2| = 1$  и  $\angle(e_1; e_2) = 60^\circ$ .

### § 3. Системы координат на плоскости

1. **Прямоугольная декартова система координат.** Пусть на плоскости выбрана некоторая точка  $O$ , которую будем называть *начальной точкой* или *точкой отсчета*.

Тогда для любой точки  $M$  вектор  $\vec{OM}$  называется *радиус-вектором* точки  $M$  относительно начальной точки  $O$ . Очевидно, что любая точка плоскости однозначно определяется своим радиус-вектором, если задана начальная точка.

Пусть на плоскости задана точка  $O$  и некоторый ортогональный базис  $i, j$ . Совокупность этого базиса и точки  $O$  называется *прямоугольной декартовой системой координат*  $O, i, j$ . Точка  $O$  называется *началом координат*.

Отложим базисные векторы  $i, j$  от начальной точки  $O$ :  $\vec{OA} = i$ ,  $\vec{OB} = j$ . Прямые  $OA$  и  $OB$  называются *координатными прямыми*. Единичные векторы  $i$  и  $j$  задают на этих прямых направления, поэтому прямые  $OA$  и  $OB$  на-



зываются еще *координатными осями*. Прямая  $OA$  называется *осью абсцисс* и обозначается  $Ox$ , а прямая  $OB$  называется *осью ординат* и обозначается  $Oy$ .

Пусть на плоскости выбрана некоторая прямоугольная декартова система координат  $O, i, j$ . Координаты радиус-вектора точки  $M$ , т. е. вектора  $\vec{OM}$ , называются *координатами точки  $M$*  в данной системе координат (рис. 27).

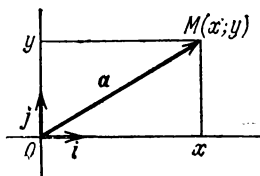


Рис. 27

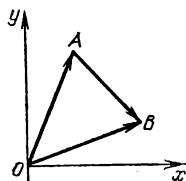


Рис. 28

Координаты точки будем записывать рядом с буквой, ее обозначающей. Например, если  $x, y$  — координаты точки  $M$ , то будем писать  $M(x; y)$ .

Очевидно, что точка на плоскости однозначно определяется своими координатами в заданной системе координат.

В тех случаях, когда нет особой необходимости, базисные векторы  $i$  и  $j$  на рисунках не изображают, а указывают лишь направления на осях  $Ox$  и  $Oy$ . В этом случае систему координат  $O, i, j$  называют *системой координат  $Oxy$* .

Пусть на плоскости задана прямоугольная декартова система координат. Найдем координаты вектора  $\vec{AB}$  (рис. 28), если известны координаты его начала и конца:  $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ .

Так как  $\vec{OA}$  и  $\vec{OB}$  — радиус-векторы точек  $A$  и  $B$  и  $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$ , то  $\vec{OA} = (x_1; y_1)$ ,  $\vec{OB} = (x_2; y_2)$  и, следовательно,

$$\vec{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1).$$

Итак, чтобы найти координаты вектора, зная координаты его начала и конца, надо из координат его конца вычесть одноименные координаты его начала.

**Задача 1.** Найти координаты и длину вектора  $\vec{AB}$ , если  $A(5; -7)$  и  $B(2; -1)$ .

$\Delta$  Если через  $x$  и  $y$  обозначить координаты вектора  $\vec{AB}$ , то  $x = 2 - 5$ ,  $y = -1 - (-7)$ .

Следовательно,  $\vec{AB} = (-3; 6)$ . ▲

**Задача 2.** Найти координаты середины отрезка, если известны координаты его концов.

△ Пусть  $x, y$  — координаты середины  $M$  отрезка с концами в точках  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$ . В задаче 2 из п. 6 § 1 было доказано, что

$$\vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB}).$$

Отсюда и из определения координат точки следует, что

$$x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \quad y = \frac{1}{2}(y_1 + y_2). \quad \blacktriangle$$

**2\*. Общая декартова система координат.** Пусть на плоскости заданы точка  $O$  и некоторый базис  $e_1, e_2$ . Совокупность этого базиса и точки  $O$  называется *декартовой системой координат*  $O, e_1, e_2$ . Точка  $O$  называется *началом координат*.

Отложим от точки  $O$  векторы  $e_1$  и  $e_2$ :  $e_1 = \vec{OA}$ , и  $e_2 = \vec{OB}$  (рис. 29). Тогда прямые  $OA$  и  $OB$  называются *координатными прямыми* или *координатными осями*, так как векторы  $e_1$  и  $e_2$  задают на них направления.

Пусть на плоскости выбрана некоторая декартова система координат  $O, e_1, e_2$ . Тогда *координатами точки  $M$*  в этой системе координат называются координаты вектора  $\vec{OM}$  в базисе  $e_1, e_2$ .

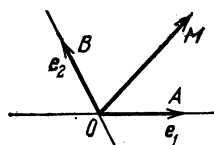


Рис. 29

Как и в случае прямоугольной декартовой системы, доказывается, что если известны координаты начала и конца вектора  $\vec{AB}$  в декартовой системе координат  $O, e_1, e_2$ :  $A(x_1; y_1)$ ,  $B(x_2; y_2)$ , то  $\vec{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$  в базисе  $e_1, e_2$ .

**3. Переход от одной прямоугольной декартовой системы координат к другой.** Выбором прямоугольной декартовой системы координат устанавливается взаимно однозначное соответствие между точками плоскости и упорядоченными парами действительных чисел. Это означает, что каждой точке плоскости соответствует единственная пара чисел и каждой упорядоченной паре действительных чисел соответствует единственная точка.

Выбор той или иной системы координат ничем не ограничен и определяется в каждом конкретном случае только соображениями удобства. Одна и та же точка в раз-

ных системах имеет, очевидно, различные координаты. Различные геометрические фигуры (например, окружность, парабола, прямая) в разных системах координат задается различными уравнениями.

Выясним, как преобразуются координаты точек плоскости при переходе от одной координатной системы к другой.

Пусть на плоскости заданы две прямоугольные системы координат:  $O, i, j$  и  $O', i', j'$  (рис. 30). Первую систему с началом в точке  $O$  и базисными векторами  $i$  и  $j$  условимся называть старой, вторую — с началом в точке  $O'$  и базисными векторами  $i'$  и  $j'$  — новой.

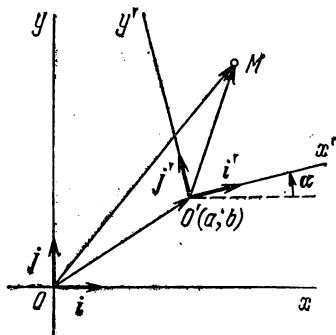


Рис. 30

Положение новой системы относительно старой будем считать известным: пусть точка  $O'$  в старой системе имеет координаты  $(a; b)$ , а вектор  $i'$  образует с вектором  $i$  угол  $\alpha$ . Угол  $\alpha$  отсчитываем в направлении, противоположном движению часовой стрелки.

Рассмотрим произвольную точку  $M$ . Обозначим ее координаты в старой системе через  $(x; y)$ , в новой — через  $(x'; y')$ . Наша задача — установить зависимость между старыми и новыми координатами точки  $M$ .

Соединим попарно точки  $O$  и  $O'$ ,  $O'$  и  $M$ ,  $O$  и  $M$ . По правилу треугольника получаем

$$\vec{OM} = \vec{OO'} + \vec{O'M}. \quad (1)$$

Разложим векторы  $\vec{OM}$  и  $\vec{OO'}$  по базисным векторам  $i$  и  $j$ , а вектор  $\vec{O'M}$  по базисным векторам  $i'$  и  $j'$ :

$$\vec{OM} = xi + yj, \quad \vec{OO'} = ai + bj, \quad \vec{O'M} = x'i' + y'j'.$$

Теперь равенство (1) можно записать так:

$$xi + yj = (ai + bj) + (x'i' + y'j'). \quad (2)$$

Новые базисные векторы  $i'$  и  $j'$  раскладываются по старым базисным векторам  $i$  и  $j$  следующим образом:

$$i' = \cos \alpha i + \sin \alpha j, \\ j' = \cos \left( \frac{\pi}{2} + \alpha \right) i + \sin \left( \frac{\pi}{2} + \alpha \right) j = -\sin \alpha i + \cos \alpha j.$$

Подставив найденные выражения для  $i'$  и  $j'$  в формулу (2), получим векторное равенство

$$xi + yj = ai + bj + x'(\cos \alpha i + \sin \alpha j) + y'(-\sin \alpha i + \cos \alpha j),$$

равносильное двум числовым равенствам:

$$\begin{cases} x = a + x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \\ y = b + x' \sin \alpha + y' \cos \alpha. \end{cases} \quad (3)$$

Формулы (3) дают искомые выражения для старых координат  $x$  и  $y$  точки через ее новые координаты  $x'$  и  $y'$ . Для того чтобы найти выражения для новых координат через старые, достаточно решить систему уравнений (3) относительно неизвестных  $x'$  и  $y'$ .

Итак, координаты точек при переносе начала координат в точку  $(a; b)$  и повороте осей на угол  $\alpha$  преобразуются по формулам (3).

Если изменяется только начало координат, а направления осей остаются прежними, то, полагая в формулах (3)  $\alpha = 0$ , получаем

$$\begin{cases} x = a + x', \\ y = b + y'. \end{cases} \quad (4)$$

Эти формулы кратко называют *формулами переноса*.

Если начало координат остается прежним, а оси поворачиваются на угол  $\alpha$ , то, полагая в формулах (3)  $a = b = 0$ , получаем

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha, \\ y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha. \end{cases} \quad (5)$$

Формулы (5) называют *формулами поворота*.

**Задача 1.** Пусть координаты нового начала в старой системе (2; 3), а координаты точки  $A$  в старой системе (4; -1). Найти координаты точки  $A$  в новой системе, если направления осей остаются прежними.

△ По формулам (4) имеем

$$\begin{cases} 4 = 2 + x', \\ -1 = 3 + y'. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\begin{cases} x' = 2, \\ y' = -4. \end{cases}$$

Ответ.  $A(2; -4)$ . ▲

Задача 2. Пусть координаты точки  $P$  в старой системе  $(-2; 1)$ , а в новой системе, направления осей которой те же самые, координаты этой точки  $(5; 3)$ . Найти координаты нового начала в старой системе.

△ По формулам (4) получаем

$$\begin{cases} -2 = a + 5, \\ 1 = b + 3, \end{cases}$$

откуда  $a = -7$ ,  $b = -2$ .

Ответ.  $(-7; -2)$ . ▲

Задача 3. Координаты точки  $A$  в новой системе  $(4; 2)$ . Найти координаты этой точки в старой системе, если начало координат осталось прежним, а оси координат старой системы повернуты на угол  $\alpha = 45^\circ$ .

△ По формулам (5) находим

$$\begin{cases} x = 4 \cos 45^\circ - 2 \sin 45^\circ = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}, \\ y = 4 \sin 45^\circ + 2 \cos 45^\circ = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}. \end{cases}$$

Ответ.  $A(\sqrt{2}; 3\sqrt{2})$ . ▲

Задача 4. Координаты точки  $A$  в старой системе  $(2\sqrt{3}; -\sqrt{3})$ . Найти координаты этой точки в новой системе, если начало координат старой системы перенесено в точку  $(-1; -2)$ , а оси повернуты на угол  $\alpha = 30^\circ$ .

△ По формулам (3) имеем

$$\begin{cases} 2\sqrt{3} = -1 + x' \cos 30^\circ - y' \sin 30^\circ, \\ -\sqrt{3} = -2 + x' \sin 30^\circ + y' \cos 30^\circ, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 2\sqrt{3} = -1 + x' \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - y' \cdot \frac{1}{2}, \\ -\sqrt{3} = -2 + x' \cdot \frac{1}{2} + y' \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \sqrt{3}x' - y' = 4\sqrt{3} + 2, \\ x' + \sqrt{3}y' = 4 - 2\sqrt{3}. \end{cases}$$

Решив эту систему уравнений относительно  $x'$  и  $y'$ , найдем:  $x' = 4$ ,  $y' = -2$ .

Ответ.  $A(4; -2)$ . ▲

**Задача 5.** Дано уравнение прямой  $y = 2x - 6$ . Найти уравнение той же прямой в новой системе координат, которая получена из старой системы поворотом осей на угол  $\alpha = 45^\circ$ .

△ Формула поворота в данном случае имеют вид

$$\begin{cases} x = x' \cos 45^\circ - y' \sin 45^\circ, \\ y = x' \sin 45^\circ + y' \cos 45^\circ, \end{cases}$$

т. е.

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} x' - \frac{\sqrt{2}}{2} y' = \frac{\sqrt{2}}{2} (x' - y'), \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} x' + \frac{\sqrt{2}}{2} y' = \frac{\sqrt{2}}{2} (x' + y'). \end{cases}$$

Заменив в уравнении прямой  $y = 2x - 6$  старые переменные  $x$  и  $y$  новыми, получим уравнение

$$\frac{\sqrt{2}}{2} (x' + y') = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} (x' - y') - 6,$$

которое после упрощений принимает вид

$$y' = \frac{x'}{3} - 2\sqrt{2}. \blacktriangle$$

**4. Полярная система координат.** Познакомимся еще с одним способом определения положения точки на плоскости при помощи чисел—полярной системой координат.

Рассмотрим на плоскости ось  $l$  с единичным вектором  $e$  и началом отсчета  $O$  (рис. 31).

Пусть  $M$ —произвольная точка плоскости, не совпадающая с точкой  $O$ . Тогда  $\vec{OM}$ —радиус-вектор точки  $M$  от-

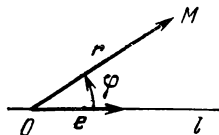


Рис. 31

носительно точки  $O$ . Пусть  $r$ —длина вектора  $\vec{OM}$ , т. е.  $|\vec{OM}| = r$ , а  $\varphi$ —угол между осью  $l$  и радиус-вектором  $\vec{OM}$ , т. е.  $\varphi = \angle(e; \vec{OM})$ , причем угол будем отсчитывать от оси  $l$  в положительном направлении, т. е. в направлении, противоположном движению часовой стрелки.

Числа  $r$  и  $\varphi$  называются *полярными координатами* точки  $M$ ;  $r$ —*полярный радиус*,  $\varphi$ —*полярный угол*.

Ось  $l$  называется *полярной осью*, а точка  $O$ —*полюсом*.

Полярный радиус точки  $O$  принимается равным нулю, полярный угол точки  $O$  не определяется.

Если точка  $M$  имеет полярные координаты  $r$  и  $\varphi$ , то пишут  $M(r; \varphi)$ . Например, точка  $K$  (рис. 32) имеет координаты  $r=2$ ,  $\varphi=45^\circ$ , т. е.  $K(2; 45^\circ)$ .

Очевидно, что положение точки на плоскости полностью определяется заданием ее полярных координат.

Если  $r > 0$ , а  $\varphi$  — произвольное число, то существует (и притом только одна) точка  $M$  такая, что

$$|\vec{OM}| = r \text{ и } \angle(e; \vec{OM}) = \varphi.$$

Если  $r=0$ , то точка совпадает с полюсом.

Отметим, что полярный угол точки, не совпадающей с полюсом, определяется неоднозначно. Например, полярным углом для точки  $K$  (см. рис. 32) является не только

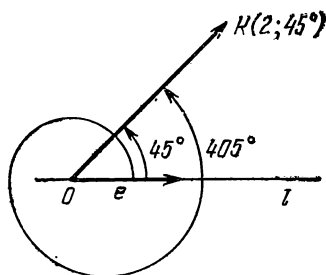


Рис. 32

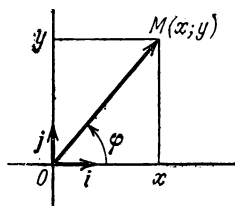


Рис. 33

угол  $\varphi=45^\circ$ , но и угол  $\varphi=405^\circ$  и, вообще, любой угол  $\varphi=45^\circ + 360^\circ k$ , где  $k \in \mathbb{Z}$ .

Полярный угол точки определяется с точностью до слагаемого, кратного  $360^\circ$ . Если  $r > 0$ , то пары чисел  $(r; \varphi)$  и  $(r; \varphi + 360^\circ k)$ , где  $k \in \mathbb{Z}$ , определяют одну и ту же точку плоскости. Чтобы соответствие между точками плоскости (за исключением полюса) и их полярными координатами было взаимно однозначным, на полярный угол  $\varphi$  накладывают ограничение  $0 \leq \varphi < 360^\circ$ .

Установим связь между полярными и прямоугольными декартовыми координатами одной и той же точки  $M$  плоскости.

Пусть на плоскости задана прямоугольная декартова система координат  $O, i, j$  (рис. 33). Примем начало координат — точку  $O$  — за полюс, ось абсцисс — за полярную ось  $l$ . Тогда луч  $Oy$  оси ординат направлен под углом  $90^\circ$  к оси  $l$ .

Очевидно, декартовы координаты точки  $M$  выражаются через ее полярные координаты следующим образом:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi. \quad (1)$$

Формулы (1) позволяют находить прямоугольные декартовы координаты точки по ее полярным координатам. Из формулы (1) получаем

$$x^2 + y^2 = r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi = r^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = r^2,$$

и, следовательно,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (2)$$

Если  $r \neq 0$  ( $M$  не совпадает с точкой  $O$ ), то из (1) и (2) следует

$$\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (3)$$

Формулы (2), (3) позволяют переходить от прямоугольных декартовых координат точки к ее полярным координатам.

**Задача 1.** Найти полярные координаты точки  $M(-1; \sqrt{3})$ .

△ По формуле (2) находим  $r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$ .  
По формулам (3) имеем

$$\cos \varphi = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

откуда  $\varphi = 120^\circ$ . Итак,  $M(2; 120^\circ)$ . ▲

**Задача 2.** Найти прямоугольные декартовы координаты точки  $M(4; 135^\circ)$ .

△ По формулам (1) имеем

$$x = 4 \cdot \cos 135^\circ = 4 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2\sqrt{2},$$

$$y = 4 \cdot \sin 135^\circ = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}.$$

Итак,  $M(-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$ . ▲

#### Вопросы для контроля

1. Какой вектор называется радиус-вектором точки?
2. Что называется прямоугольной декартовой системой координат?



3. Что называется началом координат, осью абсцисс, осью ординат?

4. Что называется координатами точки в данной прямоугольной декартовой системе координат?

5. Как найти координаты вектора, если известны координаты его начала и конца?

6. Чем отличается произвольная декартова система координат от прямоугольной?

7. Как преобразуются прямоугольные декартовы координаты точек при переносе начала координат?

8. Как преобразуются прямоугольные декартовы координаты точек плоскости при повороте осей на некоторый угол?

9. Как определяются полярные координаты точки на плоскости: полярный радиус и полярный угол?

10. Как связаны полярные координаты точки с ее прямоугольными декартовыми координатами?

### Упражнения

1.31. Зная координаты трех вершин параллелограмма  $ABCD$ , найдите координаты четвертой вершины. Рассмотрите частные случаи:

1)  $A(-1; 3)$ ,  $B(2; -5)$ ;  $C(0; 4)$ ;

2)  $A(5; 4)$ ,  $B(9; 3)$ ,  $D(1; 1)$ .

1.32. Даны две различные точки  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$ . Найдите координаты точки  $M$ , лежащей на отрезке  $AB$  и такой, что  $AM:MB = m:n$ . Чему равны координаты середины отрезка  $AB$ ?

1.33. Даны две различные точки  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$ . Найдите координаты точки  $N$ , лежащей на прямой  $AB$  вне отрезка  $AB$  и такой, что  $AN:BN = m:n$ .

1.34. Даны две точки  $A(3; -2)$  и  $B(1; 4)$ . Точка лежит на прямой  $AB$ , причем  $AM = 3AB$ . Найдите координаты точки  $M$ , если

1)  $M$  и  $B$  лежат по одну сторону от точки  $A$ ;

2)  $M$  и  $B$  лежат по разные стороны от точки  $A$ .

1.35. Найдите координаты точки пересечения медиан треугольника с вершинами  $A(x_1; y_1)$ ,  $B(x_2; y_2)$ ,  $C(x_3; y_3)$ .

1.36. В прямоугольной декартовой системе координат даны точки  $A(3; 1)$  и  $B(-1; 2)$ . Найдите координаты векторов  $\vec{AB}$  и  $\vec{BA}$ , их длины и координаты единичного вектора  $e \uparrow \vec{BA}$ .

1.37. В прямоугольной декартовой системе координат заданы точки  $A(2; -3)$  и  $B(1; 5)$ . Найдите координаты этих точек в новой системе, если начало координат осталось прежним, а оси координат повернуты на угол  $\alpha$ :

1)  $\alpha = 90^\circ$ ; 2)  $\alpha = -90^\circ$ ; 3)  $\alpha = 180^\circ$ .

1.38. Точка  $M$  относительно двух различных прямоугольных декартовых систем координат имеет координаты  $(2; 8)$  и  $(-5; -6)$ . Найдите координаты начала каждой из этих систем относительно другой, если известно, что эти системы имеют разные только начала.

1.39. Две стороны прямоугольника  $ABCD$  расположены на осях прямоугольной декартовой системы координат, причем  $\vec{AB}=5\vec{i}$  и  $\vec{AD}=2\vec{j}$ . Затем прямоугольник был перемещен так, что вершина  $A$ , совпадавшая ранее с началом координат, переместилась в точку  $A'(4; -1)$ , а сторона  $AB$  повернулась против часовой стрелки на угол  $\alpha=30^\circ$ . Найдите новое положение остальных трех вершин.

1.40. Найдите полярные координаты точек  $A(2; 2)$ ,  $B(-3; 3)$ ,  $C(-2\sqrt{2}; -2\sqrt{2})$ ,  $D(1; -\sqrt{3})$ , которые заданы в прямоугольной декартовой системе координат.

1.41. Найдите прямоугольные декартовы координаты точек  $A(\sqrt{3}; 30^\circ)$ ,  $B(1; 240^\circ)$ ,  $C(6; 180^\circ)$ ,  $D(3; 330^\circ)$ , которые заданы в полярной системе координат.

1.42. Найдите полярные координаты пяти вершин правильного шестиугольника со стороной  $a$ , если за полюс принята шестая его вершина, а полярная ось содержит его сторону.

## § 4. Скалярное произведение векторов

1. Проекция вектора на ось и ее свойства. Пусть на плоскости задана ось  $l$  с единичным вектором  $e$ . Ортогональной проекцией (или просто проекцией) вектора  $a$  на

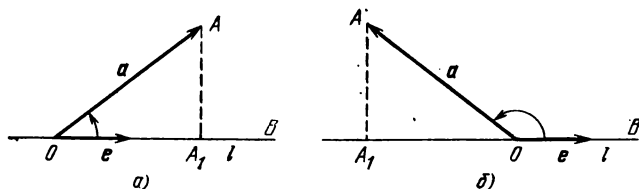


Рис. 34

ось  $l$  называется число, равное произведению длины вектора  $a$  на косинус угла между векторами  $e$  и  $a$ .

Проекция вектора  $a$  на ось  $l$  обозначается символом  $\text{pr}_l a$  или  $\text{pr}_e a$ .

Таким образом, по определению

$$\text{pr}_l a = |a| \cos \angle(e; a).$$

Отложим вектор  $a$  от точки  $O$  оси  $l$ .

Если угол между векторами  $e$  и  $a$  острый (рис. 34, а), то проекция вектора  $a$  на ось  $l$  равна длине отрезка  $OA_1$ , где  $A_1$  — проекция точки  $A$  на прямую  $l$ .

Действительно,

$$\text{pr}_l a = |a| \cos \angle(e; a) = OA \cos \angle A_1OA = OA_1.$$

Если угол между векторами  $e$  и  $a$  тупой (рис. 34, б), то проекция вектора  $a$  на ось  $l$  равна длине отрезка  $OA_1$ , взятой со знаком минус.

В самом деле,

$$\begin{aligned}\text{пр}_l \mathbf{a} &= |\mathbf{a}| \cos \angle(\mathbf{e}; \mathbf{a}) = OA \cos \angle BOA = \\ &= -OA \cos \angle A_1OA = -OA_1.\end{aligned}$$

Если угол между векторами  $\mathbf{e}$  и  $\mathbf{a}$  прямой, то  $\text{пр}_l \mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cos 90^\circ = 0$ .

Рассмотрим два важных свойства проекции вектора на ось.

1. *Проекция суммы векторов равна сумме проекций этих векторов*

$$\text{пр}_l (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \text{пр}_l \mathbf{a} + \text{пр}_l \mathbf{b}.$$

2. *Проекция произведения вектора на число равна произведению проекции данного вектора на это число:*

$$\text{пр}_l k\mathbf{a} = k \text{пр}_l \mathbf{a}.$$

□ Справедливость этих свойств следует из правил действий над векторами, заданными своими координатами.

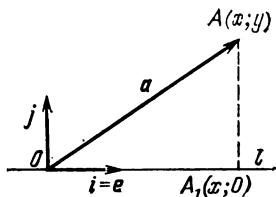


Рис. 35

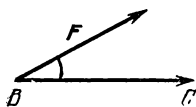


Рис. 36

В самом деле, пусть  $l$  — произвольная ось с началом отсчета  $O$  и единичным вектором  $\mathbf{e}$ . Введем прямоугольную систему координат следующим образом (рис. 35). Примем точку  $O$  за начало координат, а вектор  $\mathbf{e}$  — за первый базисный вектор ( $\mathbf{i} = \mathbf{e}$ ).

Пусть вектор  $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$  имеет координаты  $x, y$ . Тогда, по определению проекции,

$$\text{пр}_l \mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cos \angle(\mathbf{i}; \mathbf{a}).$$

Но  $|\mathbf{a}| \cos \angle(\mathbf{i}; \mathbf{a}) = x$ , т. е. проекция любого вектора на ось  $l$  равна первой координате этого вектора в выбранном нами базисе.

Так как координаты суммы векторов равны сумме соответствующих координат слагаемых векторов (п. 3 § 2), то, следовательно, и проекция суммы векторов на ось  $l$  равна сумме проекций этих векторов на ось  $l$ .

Точно так же и проекция произведения векторов на число равна произведению этого числа на проекцию вектора, так как при умножении вектора на число его координаты умножаются на это число ■.

**2. Скалярное произведение двух векторов.** В физике работа  $A$  постоянной силы  $F$  при прямолинейном движении материальной точки из положения  $B$  в положение  $C$  (рис. 36) вычисляется по формуле

$$A = |F| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cos \angle(F; \overrightarrow{BC}).$$

Эта формула вектору силы  $F$  и вектору перемещения  $\overrightarrow{BC}$  ставит в соответствие скалярную величину — работу. Величину  $A$  называют скалярным произведением векторов  $F$  и  $\overrightarrow{BC}$ . Скалярное произведение может быть определено для любых двух векторов. Оно широко используется в физике и в математике.

*Скалярным произведением* двух ненулевых векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними. Если из двух векторов хотя бы один нулевой, то скалярное произведение этих векторов принимается равным нулю.

Скалярное произведение векторов  $a$  и  $b$  обозначается  $a \cdot b$ . Итак, по определению

$$a \cdot b = |a| \cdot |b| \cos \angle(a; b). \quad (1)$$

Если  $a = b$ , то скалярное произведение принимает вид  $a \cdot a$ , называется *скалярным квадратом* вектора  $a$  и обозначается символом  $a^2$ . Очевидно, что  $a^2 = a \cdot a = |a|^2$ .

Как известно (см. п.1), проекция вектора  $b$  на ось, направление которой совпадает с направлением вектора  $a$ , выражается формулой

$$\text{пр}_a b = |b| \cos \angle(a; b). \quad (2)$$

Используя формулы (1) и (2), можно записать

$$a \cdot b = |a| \text{пр}_a b. \quad (3)$$

Таким образом, *скалярное произведение двух векторов равно произведению длины одного из них и проекции второго вектора на направление первого.*

Аналогично получается формула  $a \cdot b = |b| \text{пр}_b a$ .

**Задача 1.** Известно, что  $|a| = 2$ ,  $|b| = \frac{1}{3}$ ,  $\angle(a; b) = 150^\circ$ . Найти  $a \cdot b$ .

△ По формуле (1) находим

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos \angle(\mathbf{a}; \mathbf{b}) = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}. \blacktriangle$$

Задача 2. Найти всевозможные скалярные произведения базисных векторов  $\mathbf{i}$  и  $\mathbf{j}$  прямоугольной декартовой системы координат на плоскости.

△ По определению скалярного произведения

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} &= |\mathbf{i}| \cdot |\mathbf{j}| \cos 90^\circ = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0, \\ \mathbf{i}^2 &= \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = |\mathbf{i}| \cdot |\mathbf{i}| \cos 0^\circ = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1. \end{aligned}$$

Аналогично  $\mathbf{j} \cdot \mathbf{i} = 0$ ,  $\mathbf{j}^2 = 1$ .  $\blacktriangle$

Задача 3. Какой знак имеет скалярное произведение векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , если  $90^\circ < \angle(\mathbf{a}; \mathbf{b}) \leq 180^\circ$ ?

△ Так как в формуле  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos \angle(\mathbf{a}; \mathbf{b})$  числа  $|\mathbf{a}|$  и  $|\mathbf{b}|$  не отрицательны, знак  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$  зависит от знака косинуса. В промежутке  $(90^\circ; 180^\circ]$   $\cos \angle(\mathbf{a}; \mathbf{b}) < 0$ , поэтому  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} < 0$ .  $\blacktriangle$

Задача 4. В каком промежутке находится величина угла между векторами  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , если  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} > 0$ ?

△ Так как  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} > 0$ , то  $|\mathbf{a}| \neq 0$ ,  $|\mathbf{b}| \neq 0$  и  $\cos \angle(\mathbf{a}; \mathbf{b}) > 0$ . Отсюда  $\angle(\mathbf{a}; \mathbf{b}) \in [0^\circ; 90^\circ)$ .  $\blacktriangle$

### 3. Свойства скалярного произведения векторов.

1. Скалярное произведение векторов обладает переместительным свойством:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}. \quad (1)$$

□ Так как  $\angle(\mathbf{a}; \mathbf{b}) = \angle(\mathbf{b}; \mathbf{a})$  и  $|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| = |\mathbf{b}| \cdot |\mathbf{a}|$ , то  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos \angle(\mathbf{a}; \mathbf{b}) = |\mathbf{b}| \cdot |\mathbf{a}| \cos \angle(\mathbf{b}; \mathbf{a}) = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ .

Если  $\mathbf{a} = \mathbf{0}$  или  $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ , то по определению скалярного произведения  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$  и  $\mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = 0$ , т. е.  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ .  $\blacksquare$

2. Скалярное произведение векторов обладает сочетательным свойством по отношению к умножению вектора на число:

$$(k\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = k(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}). \quad (2)$$

□ Обозначим  $\angle(\mathbf{a}; \mathbf{b}) = \varphi$  и  $\angle(k\mathbf{a}; \mathbf{b}) = \varphi_1$ .

Если  $k > 0$ , то  $\angle(\mathbf{a}; \mathbf{b}) = \angle(k\mathbf{a}; \mathbf{b})$ , т. е.  $\varphi = \varphi_1$ , и тогда

$$(k\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = |k\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos \varphi_1 = k|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos \varphi = k(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}).$$

Если  $k < 0$ , то  $k\mathbf{a} \uparrow \downarrow \mathbf{a}$  и  $\varphi_1 = 180^\circ - \varphi$ , и тогда

$$\begin{aligned} (k\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} &= |k\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos \varphi_1 = |k| \cdot |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos (180^\circ - \varphi) = \\ &= -k|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| (-\cos \varphi) = k|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos \varphi = k(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}). \end{aligned}$$

Если  $k=0$  или  $a=0$ , или  $b=0$ , то  $(ka) \cdot b=0$  и  $k(a \cdot b)=0$ , и поэтому  $(ka) \cdot b=k(a \cdot b)$ . ■

3. Скалярное произведение векторов обладает распределительным свойством относительно сложения векторов:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c. \quad (3)$$

□ Если  $a=0$ , то свойство (3) очевидно.

Пусть  $a \neq 0$ . Тогда  $a \cdot (b + c) = a \cdot \text{пр}_a(b + c) = |a| \cdot (\text{пр}_a b + \text{пр}_a c) = |a| \cdot \text{пр}_a b + |a| \cdot \text{пр}_a c = a \cdot b + a \cdot c$ .

В ходе доказательства были использованы известные свойства проекции вектора на ось (п.2). ■

Заметим, что из (1) и (3) следует формула

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c. \quad (4)$$

Сходство свойств скалярного произведения векторов со свойствами произведения действительных чисел позволяет легко производить вычисления и преобразования со скалярными произведениями.

Задача. Доказать тождество

$$(a + b)^2 = a^2 + 2a \cdot b + b^2.$$

△ Используя свойства (1)–(4) скалярного произведения, получаем

$$\begin{aligned} (a + b)^2 &= (a + b) \cdot (a + b) = (a + b) \cdot a + (a + b) \cdot b = \\ &= a \cdot a + b \cdot a + a \cdot b + b \cdot b = a^2 + a \cdot b + a \cdot b + b^2 = \\ &= a^2 + 2a \cdot b + b^2. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

*Теорема. Для того чтобы два ненулевых вектора были ортогональны, необходимо и достаточно, чтобы их скалярное произведение было равно нулю.*

□ Необходимость. Пусть  $a \perp b$ . Тогда

$$\varphi = \angle(a; b) = 90^\circ \quad \text{и} \quad a \cdot b = |a| \cdot |b| \cos 90^\circ = 0.$$

Достаточность. Пусть  $a \cdot b = 0$ ,  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$ . Так как  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$ , то  $|a| \neq 0$ ,  $|b| \neq 0$ , а так как  $|a| \cdot |b| \cos \varphi = 0$ , то  $\cos \varphi = 0$  и, следовательно,  $\varphi = 90^\circ$ , т. е.  $a \perp b$ . ■

4. Скалярное произведение векторов, заданных своими координатами. Пусть на плоскости имеется некоторая прямоугольная декартова система координат  $O, i, j$  и пусть заданы векторы  $a = (x_1; y_1)$  и  $b = (x_2; y_2)$ . Так как

$$a = x_1 i + y_1 j, \quad b = x_2 i + y_2 j,$$

то, используя соответствующие свойства скалярного произведения векторов, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= (x_1 \mathbf{i} + y_1 \mathbf{j}) \cdot (x_2 \mathbf{i} + y_2 \mathbf{j}) = \\ &= (x_1 x_2) \mathbf{i}^2 + (x_1 y_2) \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} + (y_1 x_2) \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} + (y_1 y_2) \mathbf{j}^2. \end{aligned}$$

Очевидно, что  $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = 1$  и  $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} = 0$ , поэтому

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2. \quad (1)$$

Итак, скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений одноименных координат этих векторов в ортогональном базисе.

Задача 1. Вычислить  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ , если  $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{b} = -5\mathbf{i} + \mathbf{j}$ .

$$\triangle \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) \cdot (-5\mathbf{i} + \mathbf{j}) = 2 \cdot (-5) + 3 \cdot 1 = -7. \blacktriangle$$

Задача 2. Вычислить  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ , если  $\mathbf{a} = (2; -3)$ ,  $\mathbf{b} = (5; 7)$ .

$$\triangle \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 2 \cdot 5 + (-3) \cdot 7 = -11. \blacktriangle$$

5. Вычисление угла между двумя векторами. По определению скалярного произведения двух ненулевых векторов

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos \angle(\mathbf{a}; \mathbf{b}).$$

Следовательно, если  $\mathbf{a} \neq 0$  и  $\mathbf{b} \neq 0$ , то

$$\cos \angle(\mathbf{a}; \mathbf{b}) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|}, \quad (1)$$

т. е. косинус угла между ненулевыми векторами  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  равен скалярному произведению этих векторов, деленному на произведение их длин.

Если векторы  $\mathbf{a} = (x_1; y_1)$  и  $\mathbf{b} = (x_2; y_2)$  заданы в прямоугольной декартовой системе координат на плоскости, то косинус угла между ними вычисляется по формуле

$$\cos \angle(\mathbf{a}; \mathbf{b}) = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}. \quad (2)$$

Эта формула позволяет вычислить косинус угла между векторами  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  по координатам этих векторов.

Задача. Даны два вектора  $\mathbf{a} = (3; 4)$  и  $\mathbf{b} = (4; 3)$ . Найти угол между ними.

△ Подставив координаты векторов в формулу (2), получим

$$\cos \angle(a; b) = \frac{3 \cdot 4 + 4 \cdot 3}{\sqrt{3^2 + 4^2} \cdot \sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{24}{25},$$

откуда (по таблице)  $\angle(a; b) \approx 16^\circ$ . ▲

### Вопросы для контроля

1. Что называется ортогональной проекцией (или просто проекцией) вектора на ось?
2. Чему равна проекция суммы векторов?
3. Чему равна проекция произведения вектора на число?
4. Что называется скалярным произведением двух векторов?
5. Какие свойства скалярного произведения вы знаете?
6. Чему равно скалярное произведение двух векторов, если известны их координаты в ортогональном базисе?
7. Как найти угол между векторами, используя скалярное произведение?

### Упражнения

1.43. Найдите скалярное произведение векторов  $a$  и  $b$ , если  $|a| = 4$ ,  $|b| = 6$  и  $\angle(a; b) = \alpha$ . Рассмотрите случаи  $\alpha = 45^\circ$ ,  $\alpha = 0^\circ$ ,  $\alpha = 135^\circ$ ,  $\alpha = 90^\circ$ ,  $\alpha = 180^\circ$ .

1.44. Угол между векторами  $a$  и  $b$  равен  $120^\circ$ . Зная, что  $|a| = 5$ ,  $|b| = 4$ , вычислите  $a \cdot b$ ,  $a^2$ ,  $(a - 2b) \cdot (a + 2b)$ ,  $(a - b)^2$ ,  $(7a + b)^2$ .

1.45. Вычислите  $a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a$ , если  $a + b + c = 0$  и  $|a| = |b| = |c| = 1$ .

1.46. Найдите координаты единичных векторов, ортогональных вектору  $a = (3; -4)$ .

З а м е ч а н и е. Здесь и далее все векторы задаются своими координатами в ортогональном базисе, а все точки — в прямоугольной декартовой системе координат.

1.47. Дан вектор  $c = (4; -7)$ . Найдите координаты какого-либо вектора, ортогонального вектору  $c$ . Сколько решений имеет эта задача?

1.48. Найдите вектор  $b = (x; y)$ , ортогональный вектору  $a$ , если:

1)  $a = (3; -4)$ ,  $x = 8$ ;

2)  $a = (5; 3)$ ,  $y = 10$ .

1.49. Найдите скалярное произведение векторов  $a$  и  $b$ , заданных своими координатами:

1)  $a = (4; -1)$ ,  $b = (-1; -8)$ ;

2)  $a = (3; 1)$ ,  $b = (1; -3)$ ;

3)  $a = (-1; 2)$ ,  $b = (-2; 1)$ .

1.50. Найдите косинус угла между векторами  $a$  и  $b$ , заданными своими координатами:

1)  $a = (1; 2)$ ,  $b = (2; 3)$ ;

2)  $a = (1; 2)$ ,  $b = (3; 2)$ ;



3)  $\mathbf{a} = (1; 2)$ ,  $\mathbf{b} = (-2; 1)$ ;

4)  $\mathbf{a} = (1; -1)$ ,  $\mathbf{b} = (-2; 1)$ .

1.51. Найдите расстояние между точками  $A$  и  $B$ , заданными своими координатами:

1)  $A(-1; 2)$ ,  $B(1; -2)$ ;

2)  $A(3; -2)$ ,  $B(1; -2)$ ;

3)  $A(1; 2)$ ,  $B(-1; -2)$ .

1.52. Определите угол между вектором  $\mathbf{a} = \vec{AB} + \vec{CD}$  и осью абсцисс, если  $A(-2; 3)$ ,  $B(0; 8)$ ,  $C(5; 3)$  и  $D(10; 5)$ .

1.53. Найдите скалярное произведение векторов  $\vec{AC}$  и  $\vec{BC}$ , если:

1)  $AB=5$ ,  $BC=3$ ,  $AC=4$ ;

2)  $AB=7$ ,  $BC=4$ ,  $AC=5$ ;

3)  $AB=3$ ,  $BC=2$ ,  $AC=3$ .

1.54. В равнобедренном треугольнике медианы, проведенные к боковым сторонам, взаимно перпендикулярны. Найдите углы треугольника.

## УРАВНЕНИЯ ПРЯМЫХ НА ПЛОСКОСТИ

### § 5. Способы задания прямой на плоскости.

**Уравнение прямой, проходящей через две данные точки**

**1. Уравнение с двумя переменными и его график.** Решением уравнения с двумя переменными называется любая упорядоченная пара значений переменных, обращающая это уравнение в верное равенство.

Например, упорядоченная пара чисел  $(4; -5)$  (в которой на первом месте записано значение переменной  $x$ , а на втором месте — значение переменной  $y$ ) является решением уравнения  $3x + 2y - 2 = 0$ , так как  $3 \cdot 4 + 2 \cdot (-5) - 2 = 0$ . Пара чисел  $(-5; 4)$  не является решением данного уравнения, так как  $3 \cdot (-5) + 2 \cdot 4 - 2 \neq 0$ .

Если произвольно выбирать значения  $x$  и находить из уравнения соответствующие им значения  $y$ , то можно получить множество пар чисел, которые будут решениями этого уравнения. Такие пары значений переменных  $x$  и  $y$  можно рассматривать как координаты точек на плоскости. Множество построенных по этим координатам точек плоскости называют *графиком* данного уравнения.

Таким образом, график уравнения с двумя переменными есть множество всех точек плоскости, координаты которых являются решениями этого уравнения.

Например, выразив  $y$  через  $x$  из уравнения  $x - 2y + 3 = 0$ , получим

$$y = \frac{1}{2}(x + 3).$$

Известно, что графиком этой функции является прямая. Следовательно, графиком уравнения  $x - 2y + 3 = 0$  является та же прямая (рис. 37).

Точно так же, выразив  $y$  через  $x$  из уравнения  $x^2 - 4y = 0$ , получим

$$y = \frac{1}{4}x^2.$$

Следовательно, графиком уравнения  $x^2 - 4y = 0$  является парабола (рис. 38).

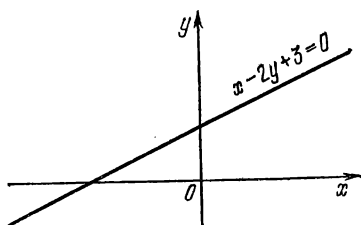


Рис. 37

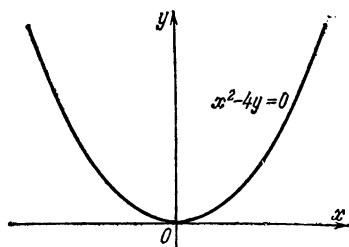


Рис. 38

**2. Способы задания прямой на плоскости.** Прямая на плоскости может быть задана следующим образом:

1) прямая  $l$  проходит через точку  $M_0$  параллельно вектору  $a$ . Точку  $M_0$  иногда называют начальной точкой (рис. 39, а);

2) прямая  $l$  проходит через точки  $M_1$  и  $M_2$  (рис. 39, б);

3) прямая  $l$  проходит через точку  $M_0$  перпендикулярно вектору  $n$  (рис. 39, в);

4) прямая  $l$  проходит через точку  $M_0$  и составляет с вектором  $i$  угол  $\varphi$  (рис. 39, г).

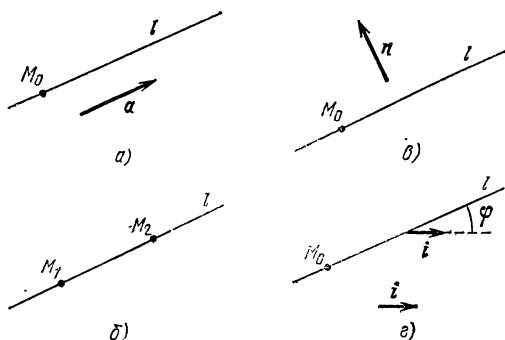


Рис. 39

Любой вектор  $a \neq 0$ , параллельный прямой  $l$ , называется *направляющим вектором* этой прямой.

Из этого определения следует, что каждая прямая имеет сколько угодно направляющих векторов и все они коллинеарны между собой (рис. 40).

Любой вектор  $\mathbf{n} \neq 0$ , перпендикулярный прямой  $l$ , называется *нормальным вектором* прямой.

Из этого определения следует, что каждая прямая имеет сколько угодно нормальных векторов и все они коллинеарны между собой (рис. 41).

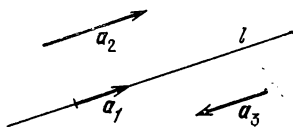


Рис. 40

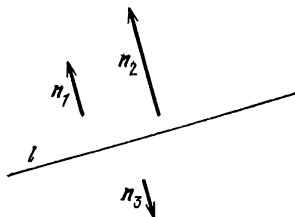


Рис. 41

Если на прямой  $l$  взять две какие-либо фиксированные точки  $M_1$  и  $M_2$ , то вектор  $\overrightarrow{M_1M_2}$  будет направляющим вектором прямой  $M_1M_2$ . Отметим, что за направляющий вектор можно взять и вектор  $\overrightarrow{M_2M_1}$ , так как  $\overrightarrow{M_1M_2} = -\overrightarrow{M_2M_1}$  и вообще любой вектор  $k \cdot \overrightarrow{M_1M_2}$ , где  $k \neq 0$ .

**3. Параметрические уравнения прямой.** Пусть прямая  $l$  задана начальной точкой  $M_0$  и направляющим вектором  $\mathbf{a}$  (рис. 42). Пусть  $M$  — любая точка; ее радиус-вектор обозначим через  $\mathbf{r}$ . Вектор  $\overrightarrow{M_0M} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$  параллелен прямой тогда и только тогда, когда точка  $M$

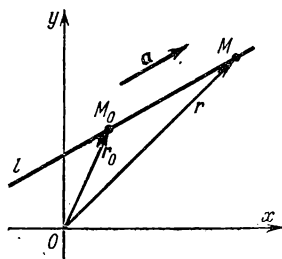


Рис. 42

лежит на этой прямой. В этом случае вектор  $\overrightarrow{M_0M}$  коллинеарен вектору  $\mathbf{a}$ . Следовательно,  $\overrightarrow{M_0M} = t\mathbf{a}$  или

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = t\mathbf{a}. \quad (1)$$

Переменная  $t$  в формуле (1), принимающая различные числовые значения, называется *параметром*, а уравнение (1) называется *векторно-параметрическим уравнением* прямой  $l$ .

Если обозначим координаты точек  $M$  и  $M_0$  через  $(x, y)$  и  $(x_0, y_0)$ , а координаты вектора  $\mathbf{a}$  через  $(a_1, a_2)$ , то урав-

нение (1) можно записать в координатах:

$$xi + yj = (x_0i + y_0j) + t(a_1i + a_2j)$$

или

$$xi + yj = (x_0 + a_1t)i + (y_0 + a_2t)j.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1t, \\ y = y_0 + a_2t. \end{cases} \quad (2)$$

Уравнения (2) называются *параметрическими уравнениями прямой*.

**Задача 1.** Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точку  $M_0(3; -5)$  параллельно вектору  $a = (4; 1)$ .

△ Непосредственной подстановкой координат точки  $M_0$  и координат вектора  $a$  в уравнения (2) получим

$$\begin{cases} x = 3 + 4t, \\ y = -5 + t. \end{cases} \quad \blacktriangle$$

**Задача 2.** Прямая  $l$  задана уравнениями  $\begin{cases} x = 5 - 2t, \\ y = -2 + 6t. \end{cases}$  Требуется построить эту прямую.

△ Для построения прямой найдем две точки. Для определения их координат нужно взять какие-либо два значения параметра  $t$  и подставить их в уравнения прямой. При  $t=0$  получаем точку  $M_0(5; -2)$ , а при  $t=1$  — точку  $M_1(3; 4)$ . Далее строим точки  $M_0$  и  $M_1$  и (при помощи линейки) проводим искомую прямую (рис. 43). ▲

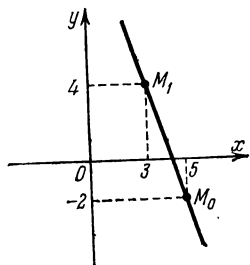


Рис. 43

**4. Каноническое уравнение прямой.** Исключим параметр  $t$  из уравнений (2) п. 3. Это возможно, так как вектор  $a \neq 0$ , и потому хотя бы одна из его координат отлична от нуля.

Пусть  $a_1 \neq 0$  и  $a_2 \neq 0$ , тогда

$$t = \frac{x - x_0}{a_1}, \quad t = \frac{y - y_0}{a_2}$$

и, следовательно,

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2}. \quad (1)$$

Уравнение (1) называется *каноническим уравнением прямой* с направляющим вектором  $\mathbf{a} = (a_1; a_2)$ .

Если  $a_1 = 0$ ,  $a_2 \neq 0$ , то уравнения (2) п. 3 примут вид

$$\begin{cases} x = x_0, \\ y = y_0 + a_2 t. \end{cases}$$

Этими уравнениями задается прямая, параллельная оси  $Oy$  и проходящая через точку  $M_0(x_0; y_0)$ . Каноническое уравнение такой прямой имеет вид

$$x = x_0. \quad (2)$$

Если  $a_1 \neq 0$ ,  $a_2 = 0$ , то уравнения (2) п. 3 примут вид

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t, \\ y = y_0. \end{cases}$$

Этими уравнениями задается прямая, параллельная оси  $Ox$  и проходящая через точку  $M_0(x_0; y_0)$ . Каноническое уравнение такой прямой имеет вид

$$y = y_0. \quad (3)$$

**Задача 1.** Составить каноническое уравнение прямой, проходящей через точку  $M_0(-1; 1)$  параллельно вектору  $\mathbf{a} = (2; 3)$ .

$\triangle$  Подставляя координаты точки  $M_0$  и координаты вектора  $\mathbf{a}$  в уравнение (3), получаем

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3}. \blacktriangle$$

**Задача 2.** Составить каноническое уравнение прямой, проходящей через точку  $M_0(3; -4)$  параллельно вектору  $\mathbf{a} = (0; 5)$ .

$\triangle$  По формуле (2) имеем  $x = 3$ .  $\blacktriangle$

**5. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки.** Пусть даны две точки  $M_1$  и  $M_2$  с координатами  $(x_1; y_1)$  и  $(x_2; y_2)$ . Чтобы составить уравнение прямой, проходящей через точки  $M_1$  и  $M_2$ , примем вектор  $\mathbf{a} = \overrightarrow{M_1 M_2}$  за направляющий вектор этой прямой.

Каноническое уравнение прямой, проходящей через точку  $M_1(x_1; y_1)$  и имеющей направляющий вектор  $\mathbf{a} = (a_1; a_2)$ , имеет вид

$$\frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{a_2}.$$

Подставив в это уравнение координаты вектора  $\vec{a} = M_1M_2 = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$ , получим

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \quad (1)$$

Это уравнение называется *уравнением прямой, проходящей через две точки*.

Если в уравнении (1) один из знаменателей обращается в нуль, то для получения уравнения следует

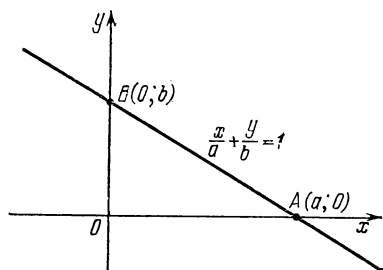


Рис. 44

приравнять нулю соответствующий числитель. Например, если  $x_2 - x_1 = 0$ , то искомым уравнением будет  $x - x_1 = 0$ . В этом случае точки  $M_1$  и  $M_2$  находятся на одинаковом расстоянии от оси  $Oy$  и прямая  $M_1M_2$  параллельна этой оси.

Часто бывает нужно составить уравнение прямой, проходящей через две

точки, одна из которых лежит на оси  $Ox$ , другая на оси  $Oy$ .

Пусть на осях координат даны точки  $A(a; 0)$  и  $B(0; b)$  и пусть  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$  (рис. 44). Полагая в формуле (1)  $x_1 = a$ ,  $y_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$ ,  $y_2 = b$ , получаем

$$\frac{x - a}{0 - a} = \frac{y - 0}{b - 0}$$

или

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \quad (2)$$

Это уравнение называется *уравнением прямой в отрезках*, так как числа  $a$  и  $b$  указывают, какие отрезки отсекает прямая на осях координат.

**Задача 1.** Составить уравнение прямой, проходящей через две точки  $M_1(3; -2)$  и  $M_2(5; 1)$ .

△ После подстановки координат точек  $M_1$  и  $M_2$  в уравнение (1) получим

$$\frac{x - 3}{5 - 3} = \frac{y + 2}{1 + 2}$$

или  $3x - 2y - 13 = 0$ . ▲

**Задача 2.** Вершины треугольника находятся в точках  $A(-3; 2)$ ,  $B(1; 5)$  и  $C(5; -7)$ . Написать уравнение медианы этого треугольника, проходящей через вершину  $A$ . Построить треугольник и медиану.

△ Пусть точка  $A_1(x_1; y_1)$  — середина стороны  $BC$ . Для нахождения ее координат воспользуемся формулами деления отрезка пополам (задача 2 п. 1 § 3):

$$x_1 = \frac{1+5}{2} = 3,$$

$$y_1 = \frac{5-7}{2} = -1.$$

Положив теперь в формуле (1)  $x_1 = 3$ ,  $y_1 = -1$ ,  $x_2 = -3$ ,  $y_2 = 2$ , получим уравнение прямой  $AA_1$ , т. е. искомое уравнение медианы,

$$\frac{x-3}{-3-3} = \frac{y+1}{2+1}$$

или

$$x + 2y - 1 = 0.$$

На рис. 45 изображен треугольник  $ABC$  и медиана  $AA_1$ . ▲.

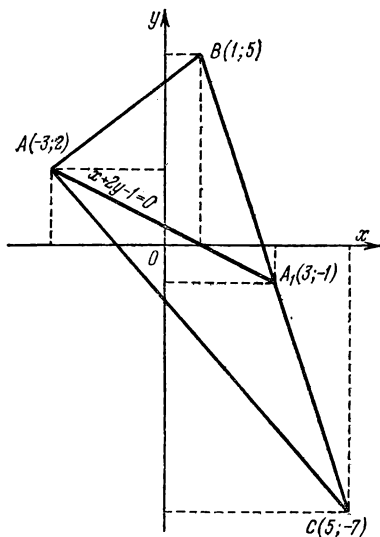


Рис. 45

**Задача 3.** Для прямой  $y = \frac{3}{4}x - 3$  написать ее уравнение в отрезках. Вычислить площадь треугольника, образованного этой прямой и осями координат.

△ Преобразуем данное уравнение следующим образом:

$$\frac{3}{4}x - y = 3, \quad \frac{x}{4} - \frac{y}{3} = 1.$$

В результате получим уравнение

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{-3} = 1,$$

которое и является уравнением данной прямой в отрезках.

Треугольник, образованный данной прямой и осями координат, является прямоугольным треугольником с ка-



тетами, равными 4 и 3 (рис. 46), поэтому его площадь равна  $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6$  (кв. ед.). ▲

**Задача 4.** Составить уравнение прямой, проходящей через точку  $A(4; -3)$ , так, что площадь треугольника, образованного этой прямой и осями координат, равна 3 кв. ед.

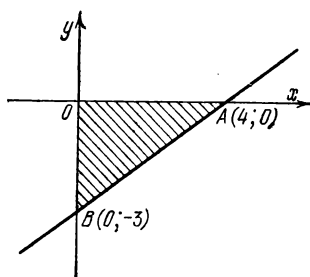


Рис. 46

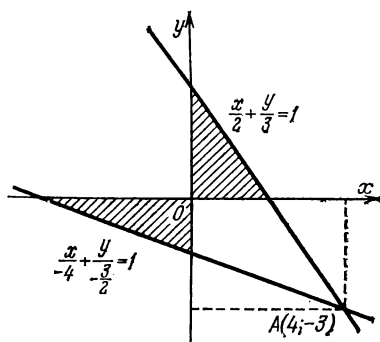


Рис. 47

△ Воспользуемся уравнением прямой в отрезках. Пусть  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$  — уравнение искомой прямой. Тогда, так как точка  $A(4; -3)$  лежит на прямой, то  $a$  и  $b$  удовлетворяют уравнению

$$\frac{4}{a} - \frac{3}{b} = 1$$

или

$$4b - 3a = ab.$$

Площадь треугольника, образованного этой прямой и осями координат, очевидно, равна  $\frac{1}{2} |a| \cdot |b|$ , поэтому  $a$  и  $b$  удовлетворяют также уравнению

$$|a| \cdot |b| = 6.$$

Следовательно, чтобы найти уравнение прямой, достаточно решить систему уравнений

$$\begin{cases} 4b - 3a = ab, \\ |ab| = 6. \end{cases}$$

Полученная система уравнений, очевидно, равносильна следующим двум системам уравнений:

$$\begin{cases} 4b-3a=6, \\ ab=6 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} 4b-3a=-6, \\ ab=-6. \end{cases}$$

Из первой системы находим  $a_1=2$ ,  $b_1=3$  и  $a_2=-4$ ,  $b_2=-\frac{3}{2}$ ; вторая система решений не имеет. Итак, задача имеет два решения (рис. 47)

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1 \text{ и } \frac{x}{-4} + \frac{y}{-\frac{3}{2}} = 1$$

или

$$3x + 2y - 6 = 0 \text{ и } 3x + 8y + 12 = 0. \blacktriangle$$

### Вопросы для контроля

1. Что называют графиком уравнения с двумя переменными?
2. Какими способами можно задать прямую на плоскости?
3. Какой вектор называется направляющим вектором прямой? Сколько направляющих векторов имеет прямая?
4. Какой вектор называется нормальным вектором прямой? Сколько нормальных векторов имеет прямая?
5. Как записываются параметрические уравнения прямой? Что нужно знать, чтобы написать эти уравнения?
6. Как записывается каноническое уравнение прямой? Что нужно знать, чтобы написать каноническое уравнение прямой?
7. Как записывается уравнение прямой, проходящей через две данные точки?
8. Какое уравнение называется уравнением прямой в отрезках?

### Упражнения

2.1. Принадлежит ли точка  $(-1; 2)$  графику уравнения:

- 1)  $3x + 5y - 7 = 0$ ;    2)  $2x^2 - 3xy - 8 = 0$ ;
- 3)  $4x^2 - y^2 - 1 = 0$ ;    4)  $3x^2 - x + y = 6$ ?

2.2. Постройте графики уравнений:

- 1)  $3x - 2y - 1 = 0$ ;    2)  $2x + 3y + 2 = 0$ ;
- 3)  $4x^2 - 2y - 3 = 0$ ;    4)  $2x^2 - 4y - 1 = 0$ ;
- 5)  $(x-3)(x-4) - y = 0$ ;    6)  $x^2 + y^2 = 1$ .

2.3. Является ли точка  $(-3; 1)$  точкой пересечения графиков уравнений:

- 1)  $y - x = 4$  и  $xy = -3$ ;
- 2)  $x^2 - y^2 = 8$  и  $3x + 12y = 1$ ?

2.4. Составьте параметрические уравнения прямой, проходящей через данную точку  $M_0$  параллельно вектору  $a$ , если:

- 1)  $M_0(-1; 2)$ ,  $a = (3; 2)$ ;    2)  $M_0(0; 1)$ ,  $a = (1; 0)$ ;  
3)  $M_0(3; -2)$ ,  $a = (1; 3)$ ;    4)  $M_0(2; 0)$ ,  $a = (0; -3)$ .

2.5. Постройте прямую, заданную уравнениями:

- 1)  $\begin{cases} x = 1 - t, \\ y = -3 + t; \end{cases}$     2)  $\begin{cases} x = -2t, \\ y = 3. \end{cases}$

2.6. Постройте прямую, проходящую через точку  $A(0; 3)$  параллельно вектору  $a = (2; 1)$ .

2.7. Составьте каноническое уравнение прямой, проходящей через точку  $M_0$  параллельно вектору  $a$ , если:

- 1)  $M_0(3; -4)$ ,  $a = (1; -4)$ ;    2)  $M_0(1; 0)$ ,  $a = (0; 3)$ ;  
3)  $M_0\left(\frac{1}{2}; 1,5\right)$ ,  $a = (-3; -2)$ ;    4)  $M_0(0; -3)$ ,  $a = (-4; 0)$ .

2.8. Постройте прямую, проходящую через точку  $E(4; -3)$  параллельно вектору  $i$ .

2.9. Составьте каноническое уравнение прямой, параллельной оси  $Oy$  и проходящей через точку  $M_0(2; -4)$ .

2.10. Прямая задана уравнением  $\frac{x-3}{5} = \frac{y+7}{4}$ . Укажите какую-нибудь точку прямой и ее направляющий вектор.

2.11. Составьте каноническое уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых  $2x + y - 3 = 0$  и  $5x - 3y - 2 = 0$  параллельно вектору  $j$ .

2.12. Составьте параметрические уравнения прямой, проходящей через точку пересечения прямых  $2x + y = 3$  и  $3x - 2y = 4$  параллельно вектору  $a = (-7; 11)$ .

2.13. Составьте уравнение прямой, проходящей через две данные точки, если:

- 1)  $M_1(-1; 6)$ ,  $M_2(-2; -3)$ ;    2)  $M_1(-3; 2)$ ,  $M_2(4; 3)$ ;  
3)  $M_1\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{5}\right)$ ,  $M_2\left(\frac{5}{6}; 0,3\right)$ ;    4)  $O(0; 0)$ ,  $M(3; -2)$ .

2.14. Для прямой  $y = -\frac{2}{3}x + 6$  напишите ее уравнение в отрезках.

2.15. Для прямой  $3x - 7y = 5$  напишите ее уравнение в отрезках.

2.16. Найдите точки пересечения прямой с осями координат и постройте эту прямую:

- 1)  $3x - 2y - 12 = 0$ ;    2)  $8x - 3y + 12 = 0$ .

2.17. Даны последовательно вершины выпуклого четырехугольника  $A(-6; -2)$ ,  $B(6; 7)$ ,  $C(9; 3)$  и  $D(1; -3)$ . Определите точку пересечения его диагоналей.

2.18. Вычислите площадь треугольника, отсекаемого прямой  $3x + 4y - 12 = 0$  от координатного угла.

2.19. Составьте уравнение прямой, если точка  $M(2; 1)$  — середина ее отрезка, заключенного между осями координат.

2.20. Прямая отсекает на осях координат в первой четверти равные отрезки. Составьте уравнение прямой, если площадь треугольника, ограниченного прямой и осями координат, равна 18.

2.21. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку  $B(0; 8)$ , если площадь треугольника, ограниченного прямой и осями координат, равна 16.

2.22. Определите площадь треугольника, ограниченного прямой  $5x + 8y - 40 = 0$  и осями координат.

2.23. Дан треугольник с вершинами в точках  $M(0; -2)$ ,  $N(0; 2)$  и  $P(2; 4)$ . Составьте уравнения стороны  $MP$ , медианы  $NE$  и высоты  $ND$ .

2.24. Дан треугольник с вершинами в точках  $A(-5; -5)$ ,  $B(1; 7)$  и  $C(5; -1)$ . Составьте уравнения сторон и медиан этого треугольника. Найдите координаты центра тяжести этого треугольника.

2.25. Какая из прямых  $2x - 3y + 4 = 0$  и  $x - y = 0$  отсекает на оси ординат больший отрезок?

2.26. Точка из начала координат движется со скоростью  $v = 3i + 2j$ . Найдите траекторию движения точки.

## § 6. Общее уравнение прямой

1. Уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору. Пусть дана некоторая точка  $M_0$  и вектор  $n$ . Проведем через точку  $M_0$  прямую  $l$  перпендикулярно вектору  $n$  (рис. 48). Пусть  $M$  — произвольная точка. Точка  $M$  лежит на прямой  $l$  в том и

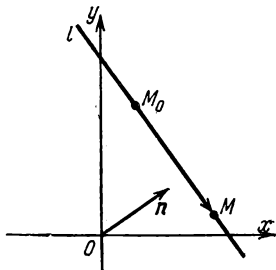


Рис. 48

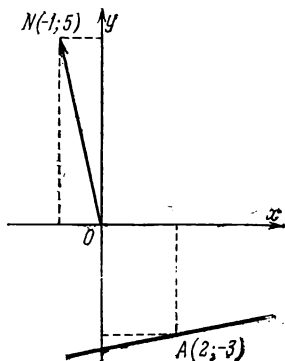


Рис. 49

только в том случае, когда вектор  $\overrightarrow{M_0M}$  перпендикулярен вектору  $n$ , а для этого необходимо и достаточно, чтобы скалярное произведение векторов  $n$  и  $\overrightarrow{M_0M}$  равнялось нулю:

$$n \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0. \quad (1)$$

Чтобы выразить последнее равенство в координатах, введем прямоугольную декартову систему координат. Пусть точки  $M_0$  и  $M$  имеют координаты  $(x_0; y_0)$  и  $(x; y)$ . Тогда  $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0)$ . Обозначим координаты нормального вектора  $\mathbf{n}$  через  $(A; B)$ . Теперь равенство (1) можно записать так:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \quad (2)$$

Уравнение (2) есть уравнение прямой  $l$ , проходящей через данную точку  $M_0(x_0, y_0)$  перпендикулярно данному вектору  $\mathbf{n} = (A; B)$ .

**Задача 1.** Составить уравнение прямой, проходящей через точку  $A(2; -3)$  перпендикулярно вектору  $\mathbf{n} = (-1; 5)$  (рис. 49).

△ Пользуясь формулой (2), находим уравнение данной прямой:

$$-1 \cdot (x - 2) + 5 \cdot (y + 3) = 0$$

или, окончательно,  $x - 5y - 17 = 0$ . ▲

**Задача 2.** Даны точки  $M_1(2; -1)$  и  $M_2(4; 5)$ . Написать уравнение прямой, проходящей через точку  $M_1$  перпендикулярно вектору  $\overrightarrow{M_1M_2}$ .

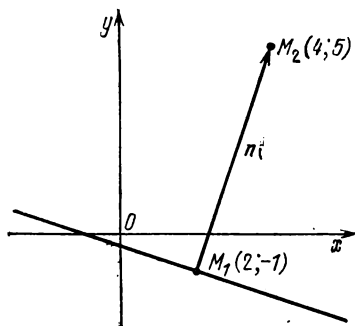


Рис. 50

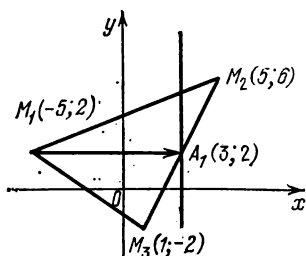


Рис. 51

△ Нормальный вектор искомой прямой  $\mathbf{n} = \overrightarrow{M_1M_2}$  имеет координаты  $(2; 6)$  (рис. 50). Следовательно, по формуле (2) получим уравнение

$$2(x - 2) + 6(y + 1) = 0$$

или  $x + 3y + 1 = 0$ . ▲

**Задача 3.** В треугольнике с вершинами в точках  $M_1(-5; 2)$ ,  $M_2(5; 6)$  и  $M_3(1; -2)$  проведена медиана  $M_1A_1$ . Требуется составить уравнение прямой, проходящей через точку  $A_1$  перпендикулярно медиане  $M_1A_1$  (рис. 51).

△ За нормальный вектор искомой прямой можно принять вектор  $\vec{n} = \overrightarrow{M_1A_1}$ . Определим его координаты. Точка  $A_1$  — середина отрезка  $M_2M_3$ , поэтому если  $(x_1; y_1)$  — ее координаты, то  $x_1 = \frac{5+1}{2} = 3$ , а  $y_1 = \frac{6-2}{2} = 2$ . Тогда нормальный вектор  $\vec{n} = \overrightarrow{M_1A_1}$  имеет координаты  $(8; 0)$ . Следовательно, искомое уравнение прямой имеет вид

$$8(x-3) + 0(y-2) = 0 \text{ или } x = 3. \blacktriangle$$

**Задача 4.** Дан треугольник с вершинами в точках  $A(-3; -1)$ ,  $B(2; 7)$  и  $C(5; 4)$ . Требуется составить уравнение прямой, проходящей через вершину  $C$  перпендикулярно стороне  $AB$  (рис. 52).

△ За нормальный вектор искомой прямой можно взять вектор  $\vec{n} = \overrightarrow{AB}$ . Так как  $\vec{n} = (2 - (-3); 7 - (-1)) = (5; 8)$ , то, подставляя координаты точки  $C$  и координаты вектора  $\vec{n}$  в формулу (2), получаем

$$5(x-5) + 8(y-4) = 0,$$

или, окончательно,  $5x + 8y - 57 = 0$ .  $\blacktriangle$

**2. Общее уравнение прямой.** Пусть дана произвольная прямая. Выберем на ней некоторую точку  $M_0(x_0; y_0)$ , и пусть  $\vec{n} = (A; B)$  — произвольный нормальный вектор этой прямой. Тогда (см. п. 1) уравнением этой прямой будет уравнение

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

Запишем его так

$$Ax - Ax_0 + By - By_0 = 0.$$

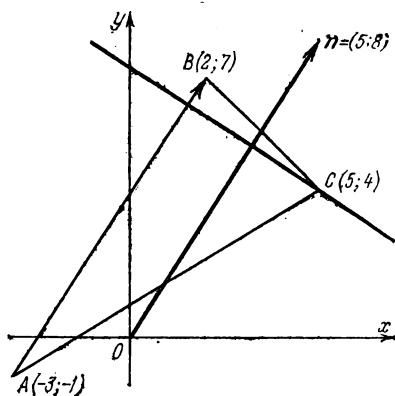


Рис. 52

Обозначив число  $-(Ax_0 + By_0)$  через  $C$ , получим

$$Ax + By + C = 0. \quad (1)$$

Таким образом, всякая прямая плоскости определяется уравнением (1), т. е. линейным уравнением с двумя переменными.

Докажем теперь, что всякое линейное уравнение является уравнением прямой.

В самом деле, в уравнении (1) по крайней мере один из коэффициентов  $A$  или  $B$  отличен от нуля, иначе это уравнение не будет линейным. Пусть, например,  $B \neq 0$ , тогда уравнение (1) можно записать в виде

$$A(x - 0) + B\left(y + \frac{C}{B}\right) = 0. \quad (2)$$

Согласно предыдущему параграфу уравнение (2), а следовательно, и уравнение (1) определяют прямую, проходящую через точку  $\left(0; -\frac{C}{B}\right)$  и перпендикулярную вектору  $\mathbf{n} = (A; B)$ .

Уравнение  $Ax + By + C = 0$ , у которого  $A \neq 0$  или  $B \neq 0$ , называется *общим уравнением прямой*.

Отметим, что в уравнении  $Ax + By + C = 0$  коэффициент  $A$  при переменной  $x$  является первой координатой нормального вектора прямой, а коэффициент  $B$  при переменной  $y$  — второй координатой нормального вектора прямой.

**Задача 1.** Указать нормальные векторы для прямых, заданных уравнениями

$$3x - 4y + 5 = 0, \quad y = \frac{2}{5}x + 17, \quad x = 5.$$

$\triangle$  Нормальным вектором первой прямой является вектор  $\mathbf{n} = (3; -4)$ ; второй — вектор  $\mathbf{n} = \left(\frac{2}{5}; -1\right)$ , третьей — вектор  $\mathbf{n} = (1; 0)$ .  $\blacktriangle$

Рассмотрим, как располагается прямая относительно системы координат в зависимости от значений  $A$ ,  $B$ ,  $C$  общего уравнения прямой.

1. Если в общем уравнении прямой  $A = 0$ , то уравнение ее можно записать в виде  $By + C = 0$  или  $y = -\frac{C}{B}$ . Это означает, что все точки прямой имеют одну и ту же ординату  $\left(-\frac{C}{B}\right)$ . Следовательно, прямая параллельна оси  $Ox$  (рис. 53).

Если  $A=0$  и  $C=0$ , то уравнение принимает вид  $y=0$ , т. е. является уравнением оси  $Ox$ .

2. Если в уравнении (1)  $B=0$ , то уравнение прямой можно записать в виде  $Ax+C=0$  или  $x=-\frac{C}{A}$ . Это

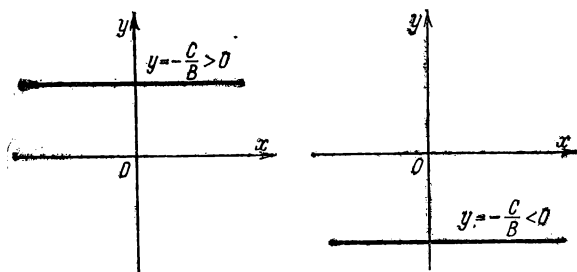


Рис. 53

означает, что все точки прямой имеют одну и ту же абсциссу  $(-\frac{C}{A})$ . Следовательно, прямая параллельна оси  $Oy$  (рис. 54).

Если  $B=0$  и  $C=0$ , то уравнение принимает вид  $x=0$ , т. е. является уравнением оси  $Oy$ .

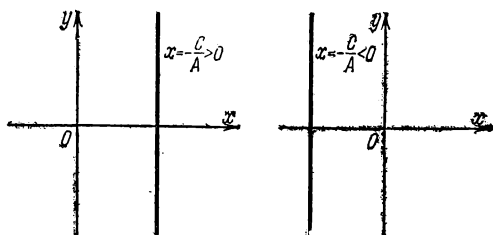


Рис. 54

3. Если  $C=0$ , то уравнение (1) имеет вид  $Ax+By=0$ . Этому уравнению удовлетворяют координаты точки  $O(0; 0)$  и, следовательно, прямая  $l$ , определяемая уравнением, проходит через начало координат (рис. 55).

4. Если  $A \neq 0$ ,  $B \neq 0$  и  $C \neq 0$ , то прямая не параллельна оси  $Ox$ , не параллельна оси  $Oy$  и не проходит через начало координат (рис. 56). В этом случае уравнение (1) приводится к виду уравнения в отрезках:



$\frac{x}{-C/A} + \frac{y}{-C/B} = 1$ , и, следовательно, прямая, определяемая уравнением (1), проходит через точки  $(-\frac{C}{A}; 0)$  и  $(0; -\frac{C}{B})$ . На рис. 56 изображена прямая, когда  $\frac{-C}{A} > 0$  и  $\frac{-C}{B} > 0$ .

Задача 2. Как расположены прямые: а)  $x - y = 0$ ; б)  $x + y = 0$ ; в)  $3x - 12 = 0$ ; г)  $5y + 20 = 0$ ; д)  $3x + 4y = 0$ ? Построить эти прямые.

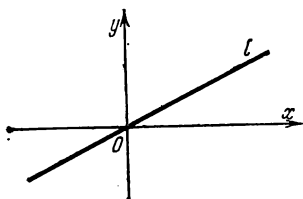


Рис. 55

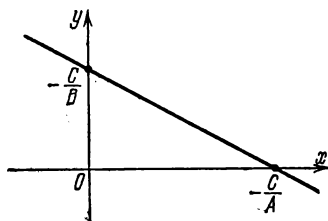


Рис. 56

△ а) Так как уравнение прямой не содержит свободного члена, то прямая проходит через начало координат. Так как для любой точки прямой абсцисса равна ординате, то прямая является биссектрисой первого и третьего координатных углов (рис. 57).

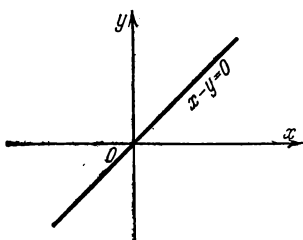


Рис. 57

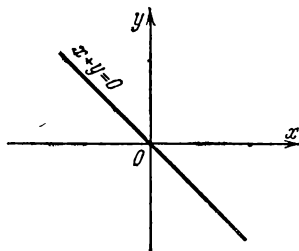


Рис. 58

б) Уравнение прямой не содержит свободного члена, следовательно, прямая проходит через начало координат. Так как для каждой точки абсцисса и ордината равны по абсолютной величине, но имеют противоположный знак, то эта прямая является биссектрисой второго и четвертого координатных углов (рис. 58).

в) Уравнением этой прямой после упрощения будет уравнение  $x=4$ . Прямая параллельна оси ординат и проходит через точку  $(4; 0)$  (рис. 59).

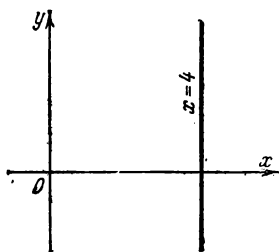


Рис. 59

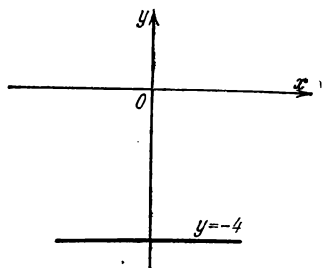


Рис. 60

г) Уравнение этой прямой можно записать в виде  $y=-4$ . Она параллельна оси абсцисс и проходит через точку  $(0; -4)$  (рис. 60).

д) Так как в уравнении отсутствует свободный член, то прямая проходит через начало координат. Для того чтобы построить прямую, нужно найти координаты еще какой-либо точки. Например, пусть  $x=4$ , тогда из уравнения следует, что для этой точки  $y=-3$ . Проведем прямую через начало координат  $O(0; 0)$  и через точку  $(4; -3)$  (рис. 61). ▲

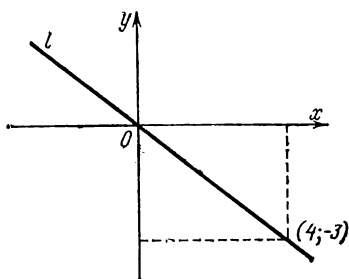


Рис. 61

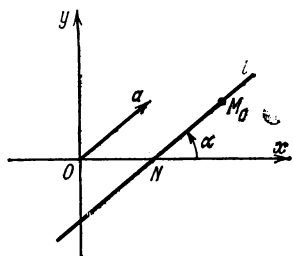


Рис. 62

**3. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.** Пусть на плоскости, где имеется прямоугольная декартова система координат, прямая  $l$  проходит через точку  $M_0$  параллельно направляющему вектору  $a$  (рис. 62). Если прямая  $l$  пересекает ось  $Ox$  (в точке  $N$ ), то под углом прямой  $l$  с осью  $Ox$  будем понимать угол  $\alpha$ , на который

необходимо повернуть ось  $Ox$  вокруг точки  $N$  в направлении часовой стрелки, чтобы ось  $Ox$  совпала с прямой  $l$ . (Имеется в виду угол, меньший  $180^\circ$ .) Этот угол называют *углом наклона* прямой. Если прямая  $l$  параллельна оси  $Ox$ , то угол наклона принимается равным нулю (рис. 63).

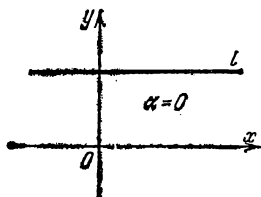


Рис. 63

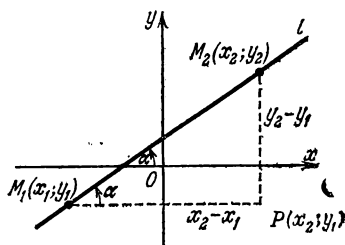


Рис. 64

Тангенс угла наклона прямой называется *угловым коэффициентом* прямой и обычно обозначается буквой  $k$ :

$$\operatorname{tg} \alpha = k. \quad (1)$$

Если  $\alpha = 0$ , то и  $k = 0$ ; это означает, что прямая параллельна оси  $Ox$  и ее угловой коэффициент равен нулю.

Если  $\alpha = 90^\circ$ , то  $k = \operatorname{tg} \alpha$  не имеет смысла: это означает, что прямая, перпендикулярная оси  $Ox$  (т. е. параллельная оси  $Oy$ ), не имеет углового коэффициента.

Угловой коэффициент прямой можно вычислить, если известны координаты двух каких-либо точек этой прямой. Пусть даны две точки прямой:  $M_1(x_1; y_1)$  и  $M_2(x_2; y_2)$  и пусть, например,  $0 < \alpha < 90^\circ$ , а  $x_2 > x_1$ ,  $y_2 > y_1$  (рис. 64). Тогда из прямоугольного треугольника  $M_1PM_2$  находим  $k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{PM_2}{M_1P} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ . Итак,

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \quad (2)$$

Аналогично доказывается, что формула (2) верна и в случае  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ .

Формула (2) теряет смысл, если  $x_2 - x_1 = 0$ , т. е. если прямая  $l$  параллельна оси  $Oy$ . Для таких прямых угловой коэффициент не существует.

**Задача 1.** Определить угловой коэффициент прямой, проходящей через точки  $M_1(3; -5)$  и  $M_2(5; -7)$ .

△ Подставляя координаты точек  $M_1$  и  $M_2$  в формулу (2), получаем

$$k = \frac{-7 - (-5)}{5 - 3} \text{ или } k = -1. \blacktriangle$$

Задача 2. Определить угловой коэффициент прямой, проходящей через точки  $M_1(3; 5)$  и  $M_2(3; -2)$ .

△ Так как  $x_2 - x_1 = 0$ , то равенство (2) теряет смысл. Для этой прямой угловой коэффициент не существует. Прямая  $M_1M_2$  параллельна оси  $Oy$ .  $\blacktriangle$

Задача 3. Определить угловой коэффициент прямой, проходящей через начало координат и точку  $M_1(3; -5)$ .

△ В этом случае точка  $M_2$  совпадает с началом координат. Применяя формулу (2), получаем

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - (-5)}{0 - 3} = -\frac{5}{3}; k = -\frac{5}{3}. \blacktriangle$$

Составим уравнение прямой с угловым коэффициентом  $k$ , проходящей через точку  $M_1(x_1; y_1)$ . По формуле (2) угловой коэффициент прямой находится по координатам двух ее точек. В нашем случае точка  $M_1$  задана, а в качестве второй точки можно взять любую точку  $M(x; y)$  искомой прямой.

Если точка  $M$  лежит на прямой, которая проходит через точку  $M_1$  и имеет угловой коэффициент  $k$ , то в силу формулы (2) имеем

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = k. \quad (3)$$

Если же точка  $M$  не лежит на прямой, то равенство (3) не выполняется. Следовательно, равенство (3) и есть уравнение прямой, проходящей через точку  $M_1(x_1; y_1)$  с угловым коэффициентом  $k$ ; это уравнение обычно записывают в виде

$$y - y_1 = k(x - x_1). \quad (4)$$

Если прямая пересекает ось  $Oy$  в некоторой точке  $(0; b)$ , то уравнение (4) принимает вид

$$y - b = k(x - 0),$$

т. е.

$$y = kx + b. \quad (5)$$

Это уравнение называется *уравнением прямой с угловым коэффициентом  $k$  и начальной ординатой  $b$* .

**Задача 4.** Найти угол наклона прямой  $\sqrt{3}x + 3y - 7 = 0$ .

△ Приведем данное уравнение к виду

$$y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{7}{3}.$$

Следовательно,  $k = \operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ , откуда  $\alpha = 150^\circ$ . ▲

**Задача 5.** Составить уравнение прямой, проходящей через точку  $P(3; -4)$ , с угловым коэффициентом  $k = \frac{2}{5}$ .

△ Подставив  $k = \frac{2}{5}$ ,  $x_1 = 3$ ,  $y_1 = -4$  в уравнение (4), получим

$$y - (-4) = \frac{2}{5}(x - 3) \quad \text{или} \quad 2x - 5y - 26 = 0. \quad \blacktriangle$$

**Задача 6.** Составить уравнение прямой, проходящей через точку  $Q(-3; 4)$  и составляющей с положительным направлением оси  $Ox$  угол  $30^\circ$ .

△ Если  $\alpha = 30^\circ$ , то  $k = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ . Подставив в уравнение (4) значения  $x_1$ ,  $y_1$  и  $k$ , получим

$$y - 4 = \frac{\sqrt{3}}{3}(x + 3) \quad \text{или} \quad \sqrt{3}x - 3y + 12 + 3\sqrt{3} = 0. \quad \blacktriangle$$

### Вопросы для контроля

1. Как записывается уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору?
2. Какое уравнение называется общим уравнением прямой?
3. Какой геометрический смысл имеют коэффициенты при переменных в общем уравнении прямой?
4. Когда прямая, заданная общим уравнением, проходит через начало координат?
5. Какой угол называется углом наклона прямой?
6. Что называется угловым коэффициентом прямой?
7. Как записывается уравнение прямой с угловым коэффициентом?

### Упражнения

2.27. Постройте прямую, проходящую через точку  $C(3; -2)$  перпендикулярно вектору  $\mathbf{n} = (1; 4)$ .

2.28. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку  $D(2; -3)$  перпендикулярно вектору  $\mathbf{n} = (4; -1)$ .

2.29. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку  $A(3; -2)$  перпендикулярно вектору  $n = (3; -2)$ .

2.30. Постройте прямую, проходящую через начало координат и перпендикулярную вектору  $n = (3; 4)$ .

2.31. Прямая задана уравнением  $-3(x+5) + \frac{1}{7}(y-6) = 0$ . Найдите координаты какой-нибудь точки прямой и ее нормального вектора.

2.32. Среди прямых  $A(x-2) + B(y+3) = 0$  выделите ту прямую, которая перпендикулярна вектору  $n = (4; 1)$ .

2.33. Постройте прямую, проходящую через точку  $C(0; 3)$  перпендикулярно вектору  $j$ .

2.34. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку  $N(3; 4)$  перпендикулярно вектору  $j$ .

2.35. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку  $F$  перпендикулярно вектору  $n = (2; 5)$ , если точка  $F$  симметрична точке  $K(3; -4)$  относительно оси  $Ox$ .

2.36. Составьте уравнение прямой, проходящей через середину отрезка  $AB$  перпендикулярно ему, если  $A(3; -2)$ ,  $B(5; -4)$ .

2.37. Через точки пересечения прямой  $5x - 2y - 10 = 0$  с осями координат проведены перпендикуляры к этой прямой. Напишите их уравнения.

2.38. В треугольнике с вершинами в точках  $M_1(-4; -3)$ ,  $M_2(-3; 4)$  и  $M_3(2; 1)$  проведена медиана  $M_2D$ . Составьте уравнение прямой, проходящей через точку  $M_2$  перпендикулярно медиане  $M_2D$ .

2.39. Составьте уравнения перпендикуляров, опущенных из вершин треугольника  $ABC$ , где  $A(1; 3)$ ,  $B(-1; 0)$ ,  $C\left(1; -\frac{4}{3}\right)$ , на его стороны и убедитесь, что они пересекаются в одной точке.

2.40. Запишите общее уравнение каждой из данных прямых и укажите координаты нормального вектора:

$$1) \begin{cases} x = 3 + 2t, \\ y = -1 + t; \end{cases} \quad 2) \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{4}; \quad 3) \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1;$$
$$4) -\frac{1}{5}(x+10) + 3\left(y - \frac{2}{3}\right) = 0.$$

2.41. Прямая задана уравнением  $2x - 3y - 6 = 0$ . Запишите: 1) уравнение этой прямой в отрезках; 2) каноническое уравнение этой прямой; 3) параметрические уравнения этой прямой.

2.42. Постройте прямые:

$$1) 3x - y + 5 = 0; \quad 2) x - 3y - 4 = 0; \quad 3) x + y + 1 = 0.$$

2.43. Найдите точку пересечения следующих пар прямых:

$$1) \begin{cases} 3x - 2y - 5 = 0, \\ 5x + y - 17 = 0; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 4x - 3y - 7 = 0, \\ 2x + 3y - 17 = 0; \end{cases}$$
$$3) \begin{cases} 2x + 5y - 29 = 0, \\ 5x + 2y - 20 = 0; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} 3x + 2y - 13 = 0, \\ 5x - 3y - 9 = 0; \end{cases}$$
$$5) \begin{cases} x - y - 7 = 0, \\ 3x - 3y + 5 = 0. \end{cases}$$

2.44. Даны уравнения сторон треугольника:

$$x - y + 4 = 0, \quad 4x + 2y - 19 = 0, \quad 5x + 6y + 9 = 0.$$

Найдите координаты его вершин.

2.45. Даны уравнения двух сторон параллелограмма

$$8x + 3y + 1 = 0, \quad 2x + y - 1 = 0$$

и уравнение одной из его диагоналей

$$3x + 2y + 3 = 0.$$

Найдите координаты вершин этого параллелограмма.

2.46. Даны уравнения двух сторон параллелограмма  $x - 4y + 11 = 0$ ,  $2x + y - 5 = 0$  и уравнение одной из его диагоналей  $x - y - 1 = 0$ . Найдите координаты вершин этого параллелограмма.

2.47. Как расположены прямые:  $y - x = 0$ ;  $2x + y = 0$ ;  $4x - 12 = 0$ ;  $6y + 24 = 0$ ;  $2x - 3y = 0$ ;  $x = 4,5$ ;  $y = 8$ ? Постройте эти прямые.

2.48. Составьте уравнения прямых, проходящих через точку  $N(4; -3)$  и параллельных осям координат.

2.49. Составьте уравнения прямых, проходящих через точку  $P(5; -2)$  и перпендикулярных осям координат.

2.50. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку  $D(-3; -2)$  и начало координат.

2.51. Вычислите угловой коэффициент прямой, проходящей через две точки  $A(3; 5)$  и  $B(-2; 4)$ .

2.52. Какой угол образует прямая, проходящая через две точки  $A(2; 0)$  и  $B(4; -2)$  с положительным направлением оси абсцисс?

2.53. Найдите угловой коэффициент прямой, проходящей через точку  $D(-1; -1)$  и начало координат.

2.54. Найдите тангенс угла наклона прямой, проходящей через точку  $C(-2; 1/2)$  и начало координат.

2.55. Напишите уравнения двух каких-либо прямых, но таких, чтобы первая из них составляла с положительным направлением оси абсцисс угол, в два раза больший, чем вторая прямая.

2.56. Найдите угол наклона следующих прямых:

1)  $3x + 3y - 7 = 0$ ; 2)  $2\sqrt{3}x - 2y + 5 = 0$ ;

3)  $y + 10 = 0$ ; 4)  $x - 5 = 0$ .

2.57. Дано уравнение прямой  $\frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 1$ . Требуется найти величину угла этой прямой с положительным направлением оси абсцисс.

2.58. Найдите угловой коэффициент прямой  $3x - 7y + 2 = 0$  и постройте ее.

2.59. Найдите тангенс угла наклона прямой  $3x - 4y + 13 = 0$  и определите, какой отрезок она отсекает на оси ординат.

2.60. Определите, какая из прямых  $2x - 3y + 4 = 0$  и  $x - y = 0$  составляет больший угол с положительным направлением оси ординат.

2.61. Прямая задана параметрическими уравнениями  $x = -3 + 3t$ ,  $y = 2 - 6t$ . Запишите уравнение этой прямой с угловым коэффициентом.

## § 7. Вычисление угла между прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых

1. Прямые, заданные общими уравнениями. Пусть прямые  $l_1$  и  $l_2$  заданы общими уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad \text{и} \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Обозначим через  $\varphi$  величину угла между прямыми  $l_1$  и  $l_2$ , а через  $\psi$  — угол между нормальными векторами  $n_1 = (A_1; B_1)$  и  $n_2 = (A_2; B_2)$  этих прямых. Если  $\psi \leq 90^\circ$  (рис. 65, а), то  $\varphi = \psi$ . Если же  $\psi > 90^\circ$  (рис. 65, б), то

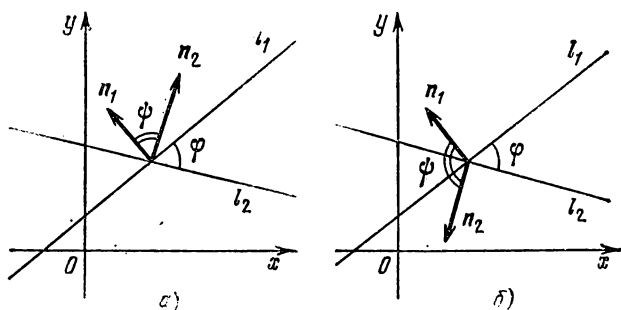


Рис. 65

$\varphi = 180^\circ - \psi$ . Легко видеть, что в любом случае верно равенство

$$\cos \varphi = |\cos \psi|.$$

Согласно формуле (1) из п. 5 § 4 имеем

$$\cos \psi = \cos \angle(n_1; n_2) = \frac{n_1 \cdot n_2}{|n_1| \cdot |n_2|}$$

и, следовательно, косинус угла  $\varphi$  между прямыми  $l_1$  и  $l_2$  может быть вычислен по формуле

$$\cos \varphi = \frac{|n_1 \cdot n_2|}{|n_1| \cdot |n_2|}. \quad (1)$$

Записав правую часть формулы (1) через координаты, получим

$$\cos \varphi = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \quad (2)$$

**Задача 1.** Вычислить угол между прямыми  
 $-3x - 4y + 25 = 0$  и  $4x + 3y - 25 = 0$ .

$\Delta$  По формуле (2) получаем

$$\cos \varphi = \frac{|-3 \cdot 4 - 4 \cdot 3|}{\sqrt{3^2 + 4^2} \sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{24}{25},$$

откуда по таблице косинусов находим  $\varphi \approx 16^\circ$ .  $\blacktriangle$



Прямые с нормальными векторами  $\mathbf{n}_1$  и  $\mathbf{n}_2$ :

а) параллельны тогда и только тогда, когда векторы  $\mathbf{n}_1$  и  $\mathbf{n}_2$  коллинеарны;

б) перпендикулярны тогда и только тогда, когда векторы  $\mathbf{n}_1$  и  $\mathbf{n}_2$  перпендикулярны, т. е. когда  $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0$ .

Отсюда получаем необходимые и достаточные условия параллельности и перпендикулярности двух прямых, заданных общими уравнениями.

Для того чтобы прямые

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad \text{и} \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

были:

а) параллельны, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0;$$

б) перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$$

**Задача 2.** Среди следующих пар прямых:

$$6x - 15y + 7 = 0 \quad \text{и} \quad 10x + 4y - 1 = 0,$$

$$5x - 7y - 4 = 0 \quad \text{и} \quad 3x + 2y - 13 = 0,$$

$$x - 2y + 1 = 0 \quad \text{и} \quad 2x - 4y - 1 = 0$$

указать параллельные или перпендикулярные.

$\triangle$  Для первой пары прямых  $A_1A_2 + B_1B_2 = 6 \cdot 10 + + (-15) \cdot 4 = 0$ , т. е. выполнено условие перпендикулярности. Прямые перпендикулярны.

Для второй пары прямых

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$$

и

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 5 \cdot 3 + (-7) \cdot 2 \neq 0.$$

Следовательно, прямые второй пары не параллельны и не перпендикулярны.

Для третьей пары прямых

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 0,$$

т. е. прямые параллельны.  $\blacktriangle$

Если прямые

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad \text{и} \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0 \quad (3)$$

имеют общую точку, то ее координаты удовлетворяют каждому из уравнений (3). Поэтому для нахождения общих точек данных прямых нужно решить систему

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Если прямые (3) не параллельны, т. е. если  $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$ , то они пересекаются. Координаты точки пересечения находятся из системы (4), которая в этом случае имеет единственное решение.

Если прямые (2) параллельны, т. е. если  $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0$ , то они либо совпадают, и тогда система (4) имеет бесконечное множество решений (координаты каждой точки прямой являются решением системы), либо не совпадают, и тогда система (4) решений не имеет.

**2. Прямые, заданные уравнениями с угловыми коэффициентами.** Пусть прямые  $l_1$  и  $l_2$  заданы уравнениями с угловыми коэффициентами  $k_1$  и  $k_2$ :

$$y = k_1x + b_1 \quad \text{и} \quad y = k_2x + b_2.$$

За нормальные векторы этих прямых можно взять  $n_1 = (k_1; -1)$  и  $n_2 = (k_2; -1)$ . Формула (2) п. 1 в этом случае имеет вид

$$\cos \varphi = \frac{|k_1k_2 + 1|}{\sqrt{k_1^2 + 1} \sqrt{k_2^2 + 1}}. \quad (1)$$

С помощью этой формулы можно найти угол  $\varphi$  между прямыми с угловыми коэффициентами  $k_1$  и  $k_2$ .

Если  $k_1 = k_2$ , то  $\cos \varphi = 1$  и  $\varphi = 0$ , т. е. прямые параллельны.

Если  $k_1k_2 + 1 = 0$ , то  $\cos \varphi = 0$  и  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , т. е. прямые перпендикулярны.

Следовательно, необходимые и достаточные условия параллельности и перпендикулярности двух прямых, заданных уравнениями с угловыми коэффициентами, формулируются следующим образом:

для того чтобы прямые  $y = k_1x + b_1$  и  $y = k_2x + b_2$  были:  
 а) параллельны, необходимо и достаточно, чтобы  $k_1 = k_2$ ;  
 б) перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы  $k_1k_2 = -1$ .

Выведем еще одну (более простую) формулу для угла между прямыми, заданными уравнениями с угловыми коэффициентами.

Так как  $0 \leq \varphi \leq 90^\circ$ , то  $\sin \varphi \geq 0$  и

$$\sin \varphi = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi}.$$

Подставив выражение для  $\cos \varphi$  из формулы (1), получим

$$\sin \varphi = \sqrt{1 - \frac{(k_1 k_2 + 1)^2}{(k_1^2 + 1)(k_2^2 + 1)}} = \frac{|k_1 - k_2|}{\sqrt{k_1^2 + 1} \sqrt{k_2^2 + 1}}.$$

Отсюда и из формулы (1) следует, что для тангенса угла между прямыми с угловыми коэффициентами  $k_1$  и  $k_2$  справедлива формула

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_1 - k_2}{k_1 k_2 + 1} \right|. \quad (2)$$

Если знаменатель в формуле (2) обращается в нуль, т. е. если  $k_1 k_2 + 1 = 0$ , то, как уже отмечалось выше, прямые перпендикулярны и  $\varphi = 90^\circ$ .

**Задача 1.** Найти угол между прямыми  $y = -\frac{x}{7} + 2$  и  $y = \frac{3}{4}x + 5$ .

$\Delta$  По формуле (2), полагая  $k_1 = -\frac{1}{7}$ ,  $k_2 = \frac{3}{4}$ , находим

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{-\frac{1}{7} - \frac{3}{4}}{-\frac{1}{7} \cdot \frac{3}{4} + 1} \right| = 1.$$

Угол между прямыми равен  $45^\circ$ .  $\blacktriangle$

**Задача 2.** Вычислить угол между прямыми  $y = -\frac{x}{4} + 1$  и  $y = 8x + 7$ .

$\Delta$  Полагая в формуле (2)  $k_1 = -\frac{1}{4}$ ,  $k_2 = 8$ , получаем

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{-\frac{1}{4} - 8}{-\frac{1}{4} \cdot 8 + 1} \right| = \frac{33}{4} = 8,25.$$

По таблице тангенсов находим  $\varphi \approx 83^\circ$ .  $\blacktriangle$

**Задача 3.** Доказать, что прямые  $y = -\frac{x}{3} - 3$  и  $y = 3x - 1$  перпендикулярны.

△ Проверим, выполняется ли условие перпендикулярности прямых:

$$k_1 k_2 = \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot 3 = -1.$$

Следовательно, прямые перпендикулярны. ▲

3. Прямые, заданные каноническими уравнениями. Рассмотрим задачу о вычислении угла между прямыми  $l_1$  и  $l_2$ , заданными в некоторой прямоугольной декартовой системе координат уравнениями

$$\frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{a_2} \quad \text{и} \quad \frac{x-x_2}{b_1} = \frac{y-y_2}{b_2}.$$

Обозначим через  $\varphi$  величину угла между прямыми  $l_1$  и

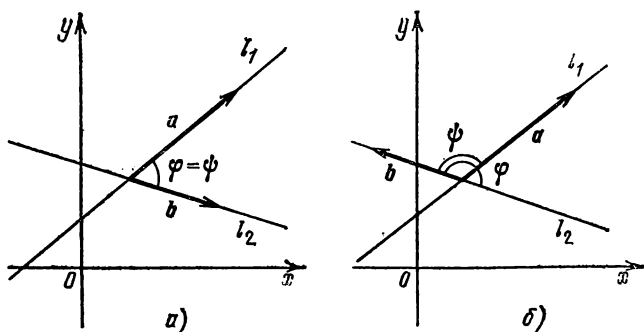


Рис. 66

$l_2$ , а через  $\psi$ —величину угла между направляющими векторами  $\mathbf{a} = (a_1; a_2)$  и  $\mathbf{b} = (b_1; b_2)$  этих прямых. Легко видеть, что если  $\psi \leq 90^\circ$  (рис. 66, а), то  $\varphi = \psi$ , а если  $\psi > 90^\circ$  (рис. 66, б), то  $\varphi = 180^\circ - \psi$ . Поэтому всегда имеет место равенство

$$\cos \varphi = |\cos \psi|.$$

По формуле (1) п. 5 § 4 получаем

$$\cos \psi = \cos \angle(\mathbf{a}; \mathbf{b}) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|}$$

и, следовательно,

$$\cos \varphi = \frac{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|}$$

или

$$\cos \varphi = \frac{|a_1 b_1 + a_2 b_2|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}. \quad (1)$$

Задача 1. Вычислить угол между прямыми

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{5} \quad \text{и} \quad \frac{x}{2} = \frac{y+1}{-3}$$

и построить эти прямые.

△ По формуле (1) находим

$$\cos \varphi = \frac{|1 \cdot 2 - 5 \cdot 3|}{\sqrt{1^2 + 5^2} \sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{13}{\sqrt{26} \sqrt{13}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Следовательно, угол между прямыми равен  $45^\circ$ .

Построить прямую проще всего по двум точкам. Из уравнений видно, что первая прямая проходит через точки  $(1; -3)$ , а вторая — через точку  $(0; -1)$ . Первая прямая пересекает ось  $Ox$  в точке  $(\frac{8}{5}; 0)$ , вторая — в точке  $(-\frac{2}{3}; 0)$ . Данные прямые изображены на рис. 67. ▲

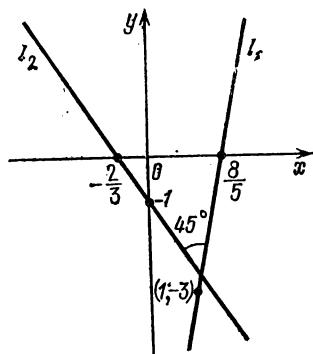


Рис. 67

Прямые с направляющими векторами  $a$  и  $b$ :

а) параллельны, когда векторы  $a$  и  $b$  коллинеарны;

б) перпендикулярны, когда векторы  $a$  и  $b$  перпендикулярны, т. е. когда  $a \cdot b = 0$ .

Отсюда получаем необходимые и достаточные условия параллельности и перпендикулярности двух прямых, заданных каноническими уравнениями.

Для того чтобы прямые

$$\frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{a_2} \quad \text{и} \quad \frac{x-x_2}{b_1} = \frac{y-y_2}{b_2}$$

были:

а) параллельны, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0;$$

б) перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы

$$a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 = 0.$$

**Задача 2.** Среди следующих пар прямых указать пары параллельных или перпендикулярных прямых

$$\frac{x-7}{3} = \frac{x}{6} \quad \text{и} \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{2},$$
$$\frac{x-5}{3} = \frac{y}{6} \quad \text{и} \quad \frac{x+2}{-2} = \frac{x-6}{1}.$$

$\Delta$  Для первой пары прямых  $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$ , так как  $\frac{3}{1} = \frac{6}{2}$ . Следовательно, прямые параллельны.

Для второй пары прямых условие  $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$  не выполняется, и поэтому прямые не параллельны.

Проверим выполнение условия перпендикулярности прямых:  $a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 = 3 \cdot (-2) + 6 \cdot 1 = 0$ . Следовательно, прямые перпендикулярны.  $\blacktriangle$

### Вопросы для контроля

1. Как вычисляется угол между прямыми, заданными общими уравнениями?

2. Сформулируйте условия параллельности и перпендикулярности двух прямых, заданных общими уравнениями.

3. Как вычисляется угол между прямыми, заданными уравнениями с угловым коэффициентом?

4. Сформулируйте условия параллельности и перпендикулярности двух прямых, заданных уравнениями с угловым коэффициентом.

5. Как вычисляется угол между прямыми, заданными каноническими уравнениями?

6. Сформулируйте условия параллельности и перпендикулярности прямых, заданных каноническими уравнениями.

### Упражнения

**2.62.** Вычислите угол между прямыми:

1)  $\frac{x-3}{3} = \frac{y}{-3\sqrt{3}}$  и  $\frac{x+3}{-3} = \frac{y}{-3\sqrt{3}}$ ;

2)  $\frac{x+4}{3} = \frac{y-6}{3\sqrt{3}}$  и  $\frac{x-5}{3} = \frac{y+2}{-3\sqrt{3}}$ ;

3)  $\frac{x+2}{24} = \frac{y-3}{7}$  и  $\frac{x-1,5}{-15} = \frac{y+\frac{4}{3}}{8}$ ;

$$4) \frac{x-6}{1} = \frac{y}{3} \quad \text{и} \quad \frac{x-3}{3} = \frac{y-6}{1};$$

$$5) \frac{x+0,5}{\sqrt{5}} = \frac{y-4}{2} \quad \text{и} \quad \frac{x-3,5}{\sqrt{5}} = \frac{y+7}{2}.$$

2.63. Среди следующих пар прямых укажите пары параллельных или перпендикулярных прямых:

$$1) \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{5} \quad \text{и} \quad \frac{x-7}{4} = \frac{y+2}{10};$$

$$2) \frac{x-3}{2} = \frac{y}{3} \quad \text{и} \quad \frac{x+1}{3} = \frac{y-7}{-2};$$

$$3) \frac{x+0,3}{3} = \frac{y-0,4}{4} \quad \text{и} \quad \frac{x-1}{12} = \frac{y+3}{-16}.$$

2.64. При каком значении  $b$  прямые  $\frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{5}$  и  $\frac{x+1}{b} = \frac{y-6}{30}$  параллельны?

2.65. При каком значении  $a$  прямые  $\frac{x+3}{2} = \frac{y-3}{a}$  и  $\frac{x}{-3} = \frac{y+4}{24}$  перпендикулярны?

2.66. Вычислите угол между прямыми:

$$1) x+5y+9=0 \quad \text{и} \quad 2x-3y+1=0;$$

$$2) 2x+y-5=0 \quad \text{и} \quad 3x-y+4=0;$$

$$3) 2x-3y+12=0 \quad \text{и} \quad 3x-y+5=0;$$

$$4) 2x-3y-7=0 \quad \text{и} \quad x+y-2=0;$$

$$5) 3x+2y-7=0 \quad \text{и} \quad 2x-3y+9=0.$$

2.67. Среди следующих пар прямых укажите пары параллельных или перпендикулярных прямых:

$$1) 2x-3y-7=0 \quad \text{и} \quad 4x-6y+9=0;$$

$$2) 3x+2y-5=0 \quad \text{и} \quad 4x-6y+9=0;$$

$$3) 3x+2y-5=0 \quad \text{и} \quad 4x-6y-5=0.$$

2.68. При каком значении  $a$  прямые  $2x-4y+9=0$  и  $ax-2y+9=0$  параллельны?

2.69. При каком значении  $b$  прямые  $2x-2y-35=0$  и  $x+by+1=0$  перпендикулярны?

2.70. Исследуйте взаимное расположение следующих пар прямых. В случае их пересечения определите координаты точки пересечения:

$$1) x+y-3=0 \quad \text{и} \quad 3x+3y-9=0;$$

$$2) x=4 \quad \text{и} \quad x+y=0;$$

$$3) y=0 \quad \text{и} \quad y-7=0;$$

$$4) 2x+y+1=0 \quad \text{и} \quad 2x+y+5=0.$$

2.71. Вычислите угол между прямыми:

$$1) y=-2x+5 \quad \text{и} \quad y=3x+4;$$

$$2) y=\sqrt{3}x+7 \quad \text{и} \quad y=-\sqrt{3}x-2;$$

$$3) y=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{6} \quad \text{и} \quad y=\frac{1}{3}x+\frac{5}{3};$$

$$4) y=-3x+7 \quad \text{и} \quad y=x+4;$$

$$5) y=\frac{2}{3}x+4 \quad \text{и} \quad y=\frac{2}{3}x+\frac{5}{2}.$$

2.72. Среди следующих пар прямых укажите пары параллельных или перпендикулярных прямых:

1)  $y = -\frac{5}{3}x + 7$  и  $y = -\frac{5}{3}x + 5$ ;

2)  $y = \frac{3}{5}x + 3$  и  $y = -\frac{5}{3}x + 5$ ;

3)  $y = \frac{1}{2}x + 3$  и  $y = \frac{1}{3}x + 2$ .

2.73. При каком значении  $a$  прямые  $y = ax + 3$  и  $y = -3x + 2$  параллельны?

2.74. При каком значении  $a$  прямые  $y = ax - 1$  и  $y = 5x + 3$  перпендикулярны?

2.75. Дана прямая  $3x - 4y + 5 = 0$ . Определите угловой коэффициент прямой:

1) параллельной данной прямой;

2) перпендикулярной данной прямой.

2.76. Дана прямая  $2x - 3y + 5 = 0$ . Составьте уравнение прямой, проходящей через точку  $M(4; -5)$ :

1) параллельно данной прямой;

2) перпендикулярно данной прямой.

2.77. Через точку пересечения прямых  $x - y + 4 = 0$  и  $4x + 2y - 19 = 0$  проведена прямая, параллельная прямой  $2x - 3y + 6 = 0$ . Найдите ее уравнение.

2.78. Через точку пересечения прямых  $4x + 2y - 19 = 0$  и  $5x + 6y + 6 = 0$  проведена прямая, перпендикулярная прямой  $x + y + 1 = 0$ . Найдите ее уравнение.

2.79. Дана прямая  $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$ . Требуется составить уравнение прямой, проходящей через точку пересечения этой прямой с осью абсцисс перпендикулярно биссектрисе первого координатного угла.

## § 8. Расстояние от точки до прямой

1. Расстояние от точки до прямой. Расстояние от точки  $M_0$  до прямой  $l$  равно длине перпендикуляра, опущенного из точки  $M_0$  на прямую  $l$ . Следовательно, чтобы найти расстояние  $d$  от точки  $M_0(x_0; y_0)$  до данной прямой  $l$ , надо через точку  $M_0$  провести прямую, перпендикулярную прямой  $l$ , и найти точку  $M_1$  пересечения этих прямых. Тогда  $d = M_0M_1$ .

Пусть прямая  $l$  задана уравнением

$$Ax + By + C = 0. \quad (1)$$

Тогда прямая, проходящая через точку  $M_0(x_0; y_0)$  и перпендикулярная прямой  $l$ , имеет уравнение

$$B(x - x_0) - A(y - y_0) = 0. \quad (2)$$



Решив систему уравнений (1) и (2), найдем координаты  $(x_1; y_1)$  точки пересечения этих прямых. Расстояние от точки  $M_0(x_0; y_0)$  до прямой  $l$  находим по формуле

$$d = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}. \quad (3)$$

**Задача.** Найти расстояние от точки  $M(1; -2)$  до прямой, заданной уравнением

$$2x + y + 3 = 0.$$

$\Delta$  Прямая, проходящая через данную точку и перпендикулярная данной прямой, имеет уравнение

$$(x - 1) - 2(y + 2) = 0.$$

Для нахождения координат точки пересечения этой прямой с данной получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + y = -3, \\ x - 2y = 5, \end{cases}$$

из которой  $5x = -1$  и  $5y = -13$ . Следовательно,  $x_1 = -0,2$ ,  $y_1 = -2,6$ , а расстояние от точки  $M$  до прямой равно

$$d = \sqrt{(x_1 - 1)^2 + (y_1 - 2)^2} = \sqrt{1,8}. \blacktriangle$$

**2. Нормированное уравнение прямой.** Пусть  $l$  — произвольная прямая (рис. 68). Обозначим через  $p$  расстояние от начала координат до прямой  $l$ , а через  $\varphi$  — угол между осью  $Ox$  и нормальным вектором прямой  $l$ . Угол будем отсчитывать от оси  $Ox$  в направлении, противоположном движению часовой стрелки. Очевидно, что положение прямой на плоскости полностью определяется заданием величин  $p$  и  $\varphi$ . Выразим коэффициенты уравнения прямой  $l$  через  $p$  и  $\varphi$ .

Пусть  $M_0$  — точка пересечения прямой  $l$  и перпендикулярной ей прямой, проходящей через начало координат,  $n_0$  — единичный нормальный вектор прямой  $l$ , т. е.  $|n_0| = 1$ . Координаты точки  $M_0$  и вектора  $n_0$  выражаются через заданные величины  $p$  и  $\varphi$  следующим образом:

$$M_0(p \cos \varphi; p \sin \varphi), \quad n_0 = (\cos \varphi; \sin \varphi).$$

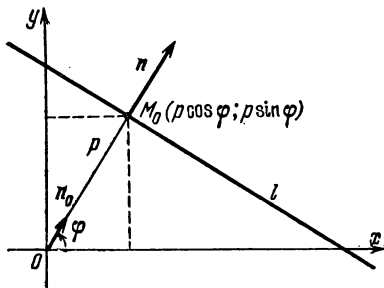


Рис. 68

В п. 1 § 6 было выведено уравнение прямой, проходящей через точку  $(x_0; y_0)$  с нормальным вектором  $(A; B)$ :

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

Подставив в это уравнение координаты точки  $M_0$  и вектора  $\mathbf{n}_0$ , получим

$$\cos \varphi (x - p \cos \varphi) + \sin \varphi (y - p \sin \varphi) = 0,$$

или

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - p(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = 0.$$

В результате приходим к уравнению

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - p = 0.$$

Оно называется *нормированным уравнением прямой*.

В нормированном уравнении все коэффициенты имеют геометрический смысл: коэффициенты при переменных  $x$  и  $y$  — координаты единичного нормального вектора прямой; свободный член  $(-p)$  равен расстоянию от начала координат до прямой, взятому со знаком «минус». Подчеркнем еще раз, что в нормированном уравнении прямой свободный член меньше или равен нулю.

Рассмотрим, например, уравнение  $x - y + 5\sqrt{2} = 0$ . Оно не является нормированным: вектор  $(1; -1)$  не единичный, так как  $|\mathbf{n}| = \sqrt{2} \neq 1$ ; свободный член уравнения положителен. Умножим обе части уравнения на  $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ .

Тогда уравнение прямой примет вид

$$-\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} - 5 = 0,$$

и станет нормированным, так как теперь вектор  $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ , очевидно, единичный, а свободный член уравнения отрицателен. Нормальный вектор рассматриваемой прямой образует с осью  $Ox$  угол  $\varphi$  такой, что  $\cos \varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , т. е.  $\varphi = 135^\circ$ . Прямая проходит на расстоянии 5 единиц длины от начала координат.

Общее уравнение прямой

$$Ax + By + C = 0$$

всегда можно привести к нормированному виду (нормировать). Если  $C \leq 0$ , то, умножив обе части уравнения

на нормирующий множитель  $\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$ , получим уравнение

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}y + \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} = 0,$$

которое является нормированным, так как вектор  $\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}; \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)$ , как легко проверить, единичный, а свободный член уравнения меньше или равен нулю.

Случай  $C > 0$  сводится к предыдущему умножением обеих частей уравнения на  $-1$ . Поэтому, если  $C > 0$ , то за нормирующий множитель следует взять число  $-\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$ .

**Задача.** Вычислить расстояние от начала координат до прямой  $6x - 8y + 25 = 0$ .

△ Так как  $C = 25 > 0$ , то, умножив обе части уравнения на нормирующий множитель  $-\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}} = -\frac{1}{\sqrt{36+64}} = -\frac{1}{10}$ , получим нормированное уравнение данной прямой

$$-0,6x + 0,8y - 2,5 = 0.$$

Учитывая геометрический смысл свободного члена нормированного уравнения прямой, видим, что искомое расстояние равно 2,5. ▲

**3. Формула для расстояния от точки до прямой.** Пусть даны точка  $M_1(x_1; y_1)$  и прямая  $l$ , заданная своим нормированным уравнением

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - p = 0.$$

Найдем расстояние  $d$  от точки  $M_1$  до прямой  $l$ , т. е. длину отрезка  $M_1K$ , где  $K$  — проекция точки  $M_1$  на прямую  $l$  (рис. 69).

Пусть, как и в п. 2,  $M_0(p \cos \varphi; p \sin \varphi)$  — точка пересечения прямой  $l$  с перпендикулярной ей прямой, проходящей через начало координат;  $\vec{n}_0 = (\cos \varphi; \sin \varphi)$  — единичный нормальный вектор прямой  $l$ .

Искомое расстояние  $d$  равно модулю проекции вектора  $\vec{M_0M_1}$  на направление вектора  $\vec{KM_1}$  или, поскольку  $\vec{KM_1}$

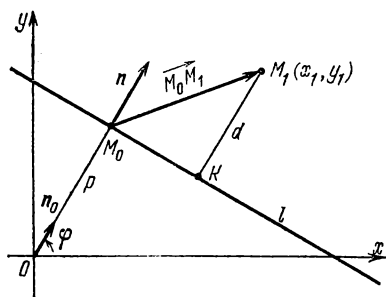


Рис. 69

и  $n_0$  коллинеарны, на направление вектора  $n_0$ . Итак,

$$d = |\operatorname{pr}_{n_0} \overrightarrow{M_0 M_1}|.$$

Выразим проекцию вектора  $\overrightarrow{M_0 M_1}$  на направление вектора  $n_0$  через скалярное произведение этих векторов. Согласно формуле (3) из п. 2 § 4 получим

$$d = |\operatorname{pr}_{n_0} \overrightarrow{M_0 M_1}| = |\overrightarrow{M_0 M_1} \cdot n_0|.$$

Так как  $\overrightarrow{M_0 M_1} = (x_1 - p \cos \varphi; y_1 - p \sin \varphi)$  и  $n_0 = (\cos \varphi; \sin \varphi)$ , то

$$\begin{aligned} d &= |(x_1 - p \cos \varphi) \cos \varphi + (y_1 - p \sin \varphi) \sin \varphi| = \\ &= |x_1 \cos \varphi + y_1 \sin \varphi - p(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)| \end{aligned}$$

и, окончательно,

$$d = |x_1 \cos \varphi + y_1 \sin \varphi - p|. \quad (1)$$

Таким образом, *расстояние от точки до прямой равно модулю числа, получающегося в результате подстановки в левую часть нормированного уравнения прямой координат данной точки.*

**Задача 1.** Определить расстояние от точки  $M(3; 2)$  до прямой  $4x - 3y + 14 = 0$ .

△ Нормируем уравнение прямой. В данном случае нормирующим множителем является число  $\frac{1}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = -\frac{1}{5}$ . Поэтому уравнение  $-\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - \frac{14}{5} = 0$  будет нормированным уравнением данной прямой. По формуле (1) находим расстояние

$$d = \left| -\frac{4}{5} \cdot 3 + \frac{3}{5} \cdot 2 - \frac{14}{5} \right| = \frac{|-12 + 6 - 14|}{5} = 4. \blacktriangle$$

**Задача 2.** Найти расстояние между параллельными прямыми  $24x - 10y + 39 = 0$  и  $y = \frac{12}{5}x - \frac{26}{5}$ .

△ Для определения расстояния между двумя параллельными прямыми достаточно выбрать на одной из них какую-либо точку и затем найти расстояние от этой точки до другой прямой.

Точка  $M(0; 3,9)$  лежит на первой прямой, так как  $24 \cdot 0 - 10 \cdot 3,9 + 39 = 0$ . Для второй прямой  $\frac{12}{5}x - y - \frac{26}{5} = 0$

нормирующий множитель равен

$$\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^2 + (-1)^2}} = \frac{5}{13},$$

поэтому ее нормированное уравнение будет таким:

$$\frac{12}{13}x - \frac{5}{13}y - 2 = 0.$$

Искомое расстояние  $d$  находим по формуле (1):

$$d = \left| \frac{12}{13} \cdot 0 - \frac{5}{13} \cdot 3,9 - 2 \right| = \left| -\frac{3}{2} - 2 \right| = 3,5. \blacktriangle$$

#### Вопросы для контроля

1. Как находится расстояние от точки до прямой?
2. Как записывается нормированное уравнение прямой? Что нужно знать, чтобы написать нормированное уравнение прямой?
3. Как общее уравнение привести к нормированному виду?
4. Как вычисляется расстояние от точки до прямой, если она задана нормированным уравнением?

#### Упражнения

2.80. Определите, какие из следующих уравнений прямых являются нормированными:

$$1) \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 5 = 0; \quad 2) \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 5 = 0;$$

$$3) \frac{4}{5}x - \frac{3}{4}y - 7 = 0; \quad 4) y - 3 = 0;$$

$$5) x - 15 = 0.$$

2.81. В каждом из следующих случаев приведите общее уравнение прямой к нормированному виду и найдите расстояние от начала координат до данной прямой:

$$1) 3x - 4y - 25 = 0; \quad 2) \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - 20 = 0;$$

$$3) x + 5 = 0; \quad 4) 5x - 12y + 26 = 0;$$

$$5) \frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y + 13 = 0.$$

2.82. Дана прямая  $\frac{x}{3} + \frac{y}{-2} = 1$ . Определите расстояние до этой прямой от начала координат.

2.83. Составьте уравнения прямых, перпендикулярных прямой  $2x + y = 0$ , если расстояние от начала координат до этих прямых равно 3.

2.84. Найдите расстояние от данной точки до данной прямой:

$$1) M_0 \left( \frac{3}{2}; 9 \right), \quad 4x + 3y - 8 = 0;$$

2)  $M_0 \left( -\frac{3}{2}; -9 \right), \quad 4x + 3y - 17 = 0.$

2.85. Вычислите расстояние между параллельными прямыми:

1)  $4x - 3y + 25 = 0, \quad 8x - 6y + 25 = 0;$

2)  $5x - 12y + 26 = 0, \quad 5x - 12y - 13 = 0;$

3)  $3x - 4y - 20 = 0, \quad 6x - 8y + 25 = 0.$

2.86. Даны вершины треугольника:  $A(2; 1), B(-2; 3)$  и  $C(-10; -13)$ . Вычислите длину перпендикуляра, опущенного из вершины  $B$  на медиану, проведенную из вершины  $C$ .

2.87. Через точку пересечения прямых  $3x + 2y - 13 = 0, x + 3y - 9 = 0$  проведена прямая параллельно прямой  $\frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 1$ . Составьте ее уравнение. Найдите расстояние от этой прямой до прямой  $\frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 1$ .

2.88. Запишите уравнения прямых, параллельных прямой  $4x + 3y + 1 = 0$  и отстоящих от нее на расстоянии 3 единиц.

2.89. Запишите уравнение прямой, которая параллельна прямым  $3x + 2y = 5$  и  $6x + 4y + 4 = 0$  и расстояние от которой до этих прямых было бы одинаковым.

2.90. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку  $(1; 2)$  так, что расстояния до этой прямой от точек  $(2; 3)$  и  $(4; -5)$  одинаковы.

## КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

## § 9. Окружность и эллипс

**1. Окружность.** *Окружностью* называется множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой *центром*.

Если точка  $C$ —центр окружности,  $R$ —ее радиус, а  $M$ —произвольная точка окружности, то из определения окружности следует, что

$$CM = R. \quad (1)$$

Равенство (1) есть уравнение окружности радиуса  $R$  с центром в точке  $C$ .

Пусть на плоскости задана прямоугольная декартова система координат (рис. 70) и точка  $C(a; b)$ —центр окружности радиуса  $R$ . Пусть  $M(x; y)$ —произвольная точка этой окружности. Как известно, расстояние  $CM =$

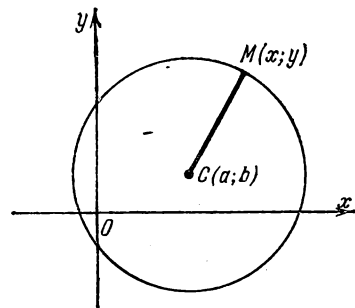


Рис. 70

$= \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ , поэтому уравнение можно записать так:

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R$$

или

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2. \quad (2)$$

Уравнение (2) называют *общим уравнением окружности* или *уравнением окружности радиуса  $R$  с центром в точке  $(a; b)$* . Например, уравнение

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 = 25$$

есть уравнение окружности радиуса  $R=5$  с центром в точке  $(1; -3)$ .

Если центр окружности совпадает с началом координат, то уравнение (2) принимает вид

$$x^2 + y^2 = R^2. \quad (3)$$

Уравнение (3) называют *каноническим уравнением окружности*.

**Задача 1.** Написать уравнение окружности радиуса  $R=7$  с центром в начале координат.

△ Непосредственной подстановкой значения радиуса в уравнение (3) получим  $x^2 + y^2 = 49$ . ▲

**Задача 2.** Написать уравнение окружности радиуса  $R=9$  с центром в точке  $C(3; -6)$ .

△ Подставив значение координат точки  $C$  и значение радиуса в формулу (2), получим  $(x-3)^2 + (y-(-6))^2 = 81$  или  $(x-3)^2 + (y+6)^2 = 81$ . ▲

**Задача 3.** Найти центр и радиус окружности

$$(x+3)^2 + (y-5)^2 = 100.$$

△ Сравнивая данное уравнение с общим уравнением окружности (2), видим, что  $a=-3$ ,  $b=5$ ,  $R=10$ . Следовательно,  $C(-3; 5)$ ,  $R=10$ . ▲

**Задача 4.** Доказать, что уравнение  $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$  является уравнением окружности. Найти ее центр и радиус.

△ Преобразуем левую часть данного уравнения:

$$x^2 + 4x + 4 - 4 + y^2 - 2y + 1 - 1 - 4 = 0$$

или

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 9.$$

Это уравнение представляет собой уравнение окружности с центром в точке  $(-2; 1)$ ; радиус окружности равен 3. ▲

**Задача 5.** Написать уравнение окружности с центром в точке  $C(-1; -1)$ , касающейся прямой  $AB$ , если  $A(2; -1)$ ,  $B(-1; 3)$ .

△ Напишем уравнение прямой  $AB$ :

$$\frac{x-2}{-1-2} = \frac{y+1}{3+1} \text{ или } 4x + 3y - 5 = 0.$$

Так как окружность касается данной прямой, то радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен этой прямой. Для отыскания радиуса необходимо найти расстояние от точки  $C(-1; -1)$  — центра окружности до



прямой  $4x + 3y - 5 = 0$ :

$$R = \frac{|4 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) - 5|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{12}{5}.$$

Напишем уравнение искомой окружности

$$(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = \frac{144}{25}. \blacktriangle$$

Пусть в прямоугольной системе координат дана окружность  $x^2 + y^2 = R^2$ . Рассмотрим ее произвольную точку  $M(x; y)$  (рис. 71). Пусть радиус-вектор  $\vec{OM}$  точки  $M$  образует угол величины  $t$  с положительным направлением оси  $Ox$ , тогда абсцисса и ордината точки  $M$  изменяются в зависимости от  $t$  ( $0 \leq t < 2\pi$ ). Выражая  $x$  и  $y$  через  $t$ , находим

$$\begin{aligned} x &= R \cos t; \quad y = R \sin t, \\ 0 &\leq t < 2\pi. \end{aligned} \quad (4)$$

Уравнения (4) называются *параметрическими уравнениями окружности с центром в начале координат*.

Задача 6. Окружность задана уравнениями

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{3} \cos t, \quad y = \sqrt{3} \sin t, \\ 0 &\leq t < 2\pi. \end{aligned}$$

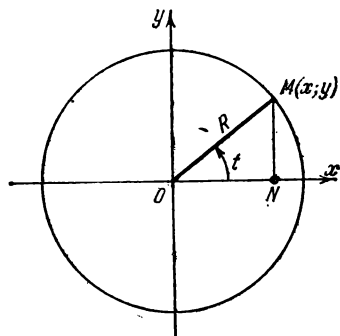


Рис. 71

Записать каноническое уравнение этой окружности.

△ Из условия следует  $x^2 = 3 \cos^2 t$ ,  $y^2 = 3 \sin^2 t$ . Складывая эти равенства почленно, получаем

$$x^2 + y^2 = 3(\cos^2 t + \sin^2 t)$$

или  $x^2 + y^2 = 3$ . ▲

2. **Эллипс и его каноническое уравнение.** *Эллипсом* называется множество точек плоскости, для каждой из которых сумма расстояний до двух данных точек той же плоскости постоянна и больше расстояния между этими точками.

Данные точки называются *фокусами* эллипса, а расстояние между ними — *фокальным расстоянием*. С эллипсом человеку приходится иметь дело в самых различных областях его деятельности. Садовник размечает клумбу, очертания которой имеют форму эллипса. Художник

вычерчивает эллиптический контур для росписи стен или потолка зала. Математик рассчитывает эллиптическую траекторию движения спутника Земли. Наконец, сама Земля, как известно, движется по орбите, имеющей форму эллипса, в одном из фокусов которого находится Солнце. Покажем, как, исходя из определения эллипса, можно разбить клумбу, которая имеет эллиптическую форму. Забьем в землю два колышка (рис. 72), затем тонкую веревку свяжем в кольцо и наденем веревочное кольцо на оба колышка. Натянув веревку третьим колышком,

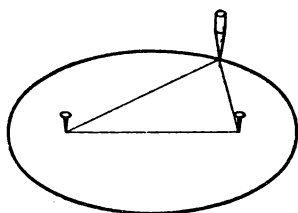


Рис. 72

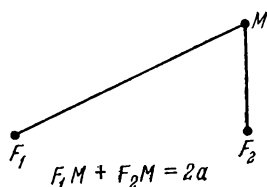


Рис. 73

вычертим им эллипс. Изменяя расстояние между колышками и длину веревки, можно получать эллипсы разных размеров и формы.

Обозначим фокусы эллипса буквами  $F_1$  и  $F_2$ . Пусть фокальное расстояние  $F_1F_2 = 2c$ . Если  $M$  — произвольная точка эллипса (рис. 73), то по определению эллипса сумма  $F_1M + F_2M$  постоянна. Обозначив ее через  $2a$ , получим

$$F_1M + F_2M = 2a. \quad (1)$$

Отметим, что по определению эллипса  $2a > 2c$ , т. е.  $a > c$ . Равенство (1) есть уравнение эллипса.

Если точка  $F_1$  совпадает с точкой  $F_2$ , то уравнение эллипса принимает вид

$$2F_1M = 2a, \quad \text{т. е.} \quad F_1M = a.$$

Это уравнение является уравнением окружности радиуса  $a$  с центром в точке  $F_1$  ( $F_1 = F_2$ ). Таким образом, всякая окружность является частным случаем эллипса.

Выберем систему координат так, чтобы ось абсцисс проходила через фокусы эллипса; ось ординат проведем через середину отрезка  $F_1F_2$  перпендикулярно ему. Тогда фокусами будут точки  $F_1(-c; 0)$  и  $F_2(c; 0)$  (рис. 74).

Пусть  $M(x; y)$  — любая точка эллипса, тогда

$$F_1M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \quad \text{и} \quad F_2M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Подставляя найденные значения  $F_1M$  и  $F_2M$  в уравнение (1), получаем

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a. \quad (2)$$

Уравнение (2) является уравнением эллипса в выбранной системе координат. Это уравнение можно привести к более простому виду. Для этого сначала перенесем второе слагаемое левой части уравнения в правую часть:

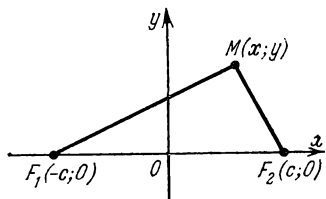


Рис. 74

$$\begin{aligned} \sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= \\ &= 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Затем возведем обе части полученного равенства в квадрат:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2.$$

После упрощений получим

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a - \frac{c}{a}x. \quad (4)$$

Возводя в квадрат обе части уравнения (4), будем иметь

$$(x-c)^2 + y^2 = \left(a - \frac{c}{a}x\right)^2$$

или

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = a^2 - 2cx + \frac{c^2}{a^2}x^2,$$

откуда

$$\frac{a^2 - c^2}{a^2}x^2 + y^2 = a^2 - c^2. \quad (5)$$

По определению эллипса  $a > c$ , поэтому  $a^2 - c^2$  — положительное число. Обозначим его через  $b^2$ , т. е. положим  $b^2 = a^2 - c^2$ . Тогда уравнение (5) примет вид

$$\frac{b^2}{a^2}x^2 + y^2 = b^2.$$

Разделив обе части последнего равенства на  $b^2$ , получим уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (6)$$

Оно называется *каноническим уравнением эллипса*. При  $a=b$ , т. е. в случае  $c=0$ , уравнение (6) принимает вид

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

т. е. является каноническим уравнением окружности.

**З а м е ч а н и е.** Полученное нами уравнение (6) является следствием уравнения (2). Поэтому координаты  $x$  и  $y$  каждой точки эллипса, заданного уравнением (2), удовлетворяют и уравнению (6). При выводе уравнения (6) мы дважды возводили в квадрат обе части уравнения. Такая операция могла привести к тому, что уравнению (6) удовлетворяли бы не только координаты  $x$  и  $y$  точек эллипса, но и координаты каких-то точек, не принадлежащих эллипсу (как известно, при возведении в квадрат могут появиться посторонние решения). Покажем, что в данном случае этого не произошло. Поскольку  $\frac{y^2}{b^2} \geq 0$ , то из уравнения (6) следует, что  $\frac{x^2}{a^2} \leq 1$ , т. е.  $|x| \leq a$ . Аналогично заключаем, что  $|y| \leq b$ . Таким образом, все точки  $M(x; y)$ , координаты которых удовлетворяют уравнению (6), находятся в прямоугольнике  $|x| \leq a$ ,  $|y| \leq b$ . Но в прямоугольнике  $|x| \leq a$ ,  $|y| \leq b$  нет точек, координаты которых удовлетворяют уравнению (6) и не удовлетворяют уравнению эллипса (2), так как на множестве точек этого прямоугольника при возведении в квадрат не нарушается равносильность из-за неотрицательности обеих частей уравнений (3) и (4). Левые части уравнений (3) и (4) всюду неотрицательны. Покажем, что при  $|x| \leq a$  и  $|y| \leq b$  правые части этих уравнений также неотрицательны. Действительно,

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &\leq \sqrt{(-a-c)^2 + b^2} = \\ &= \sqrt{a^2 + 2ac + c^2 + b^2} = \sqrt{2a^2 + 2ac} \leq \sqrt{2a^2 + 2a^2} = 2a, \\ a - \frac{c}{a}x &\geq a - \frac{c}{a}a = a - c > 0. \end{aligned}$$

Итак, уравнения (2) и (6) равносильны.

**Задача 1.** Написать каноническое уравнение эллипса, проходящего через точку  $M(5; 0)$ , если фокальное расстояние равно 6.

△ Так как  $F_1F_2=6$ , то  $c=3$ . Запишем каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

По условию точка  $M(5; 0)$  принадлежит эллипсу, следовательно,  $\frac{25}{a^2} = 1$ , откуда  $a^2 = 25$ . Из равенства  $a^2 - c^2 = b^2$  находим  $b^2 = 25 - 9 = 16$ . Итак, искомым уравнением эллипса будет уравнение

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1. \quad \blacktriangle$$

**Задача 2.** Доказать, что уравнение  $36x^2 + 100y^2 - 3600 = 0$  является уравнением эллипса. Найти координаты фокусов и фокальное расстояние.

△ Разделив обе части уравнения на 3600, получим

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1.$$

Это уравнение является уравнением эллипса.

Из равенства  $a^2 - c^2 = b^2$  следует, что  $c^2 = a^2 - b^2$ . Так как  $a^2 = 100$  и  $b^2 = 36$ , то  $c^2 = 64$ , откуда  $c = 8$ . Фокусы эллипса будут находиться в точках  $F_1(-8; 0)$  и  $F_2(8; 0)$ . Фокальное расстояние  $F_1F_2 = 16$ .  $\blacktriangle$

**3. Исследование эллипса по его каноническому уравнению.** Рассмотрим эллипс, заданный в некоторой прямоугольной декартовой системе координат своим каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (1)$$

Отметим следующие свойства эллипса.

1) *Эллипс (1) пересекает каждую из осей координат в двух точках.*

Для того чтобы определить координаты точек пересечения эллипса (1) с осью  $Ox$ , нужно решить совместно их уравнения:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad y = 0.$$

Точка пересечения эллипса с осью  $Ox$  должна иметь ординату  $y=0$  и в то же время принадлежать эллипсу. Подставив  $y=0$  в уравнение эллипса, получим  $x = \pm a$ .

Итак, точками пересечения эллипса (1) с осью  $Ox$  будут  $A(a; 0)$  и  $C(-a; 0)$ . Аналогично находим точки пересечения эллипса с осью  $Oy$ :  $B(0; b)$  и  $D(0; -b)$

(рис. 75). Точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  называются *вершинами эллипса*.

Отрезок  $AC$  называется *большой осью* эллипса, отрезок  $BD$  — *малой осью*. Фокусы  $F_1$  и  $F_2$  эллипса лежат на большой оси. Длина большой оси, очевидно, равна  $2a$ , малой оси —  $2b$ . Числа  $a$  и  $b$  называют *полуосями эллипса*.

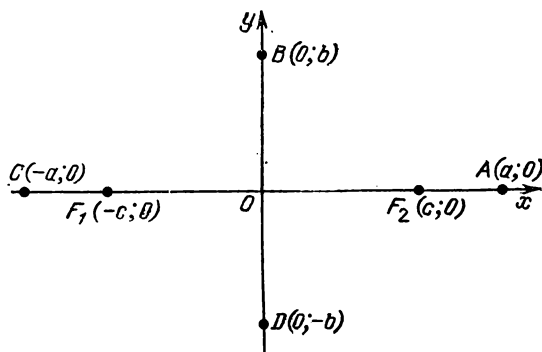


Рис. 75

2) *Эллипс имеет две взаимно перпендикулярные оси симметрии.*

В уравнение (1) переменные  $x$  и  $y$  входят только во второй степени. Следовательно, если координаты точки  $N(x; y)$  удовлетворяют уравнению (1), то этому же уравнению также будут удовлетворять и координаты точек  $N_1(-x; y)$  и  $N_2(x; -y)$ . Легко видеть, что точка  $N_1$  симметрична точке  $N$  относительно оси ординат, точка  $N_2$  симметрична точке  $N$  относительно оси абсцисс.

Таким образом, эллипс имеет две оси симметрии, они взаимно перпендикулярны. Большая и малая оси эллипса лежат на его осях симметрии. Заметим, что в частном случае, когда  $a = b$ , т. е. когда эллипс является окружностью, осью симметрии будет любая прямая, проходящая через центр окружности.

3) *Эллипс имеет центр симметрии.*

Если координаты точки  $N(x; y)$  удовлетворяют уравнению (1), то этому же уравнению удовлетворяют и координаты точки  $K(-x; -y)$ . Точка  $K$ , очевидно, симметрична точке  $N$  относительно начала координат. Таким образом, эллипс имеет центр симметрии. Центр симметрии эллипса называется *центром эллипса*.

4) *Эллипс может быть получен равномерным сжатием окружности.*

Рассмотрим окружность радиуса  $R=a$  с центром в начале координат (рис. 76). Пусть  $P(X; Y)$  — произвольная точка этой окружности. Тогда

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{a^2} = 1. \quad (2)$$

Точке  $P(X; Y)$  на окружности сопоставим точку  $P_1(x; y)$  такую, что

$$x = X \quad \text{и} \quad y = \frac{b}{a} Y.$$

Точка  $P_1$  получается сдвигом точки  $P$ , при котором абсцисса не изменяется, а ордината уменьшается в отношении  $\frac{b}{a}$ . Координаты точки  $P_1$  удовлетворяют уравнению эллипса. В самом деле,

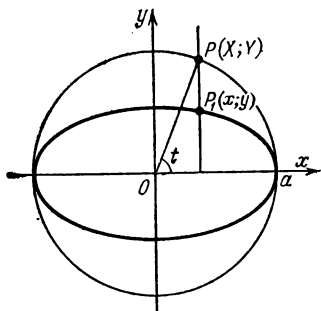


Рис. 76

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= \frac{X^2}{a^2} + \frac{\left(\frac{b}{a} Y\right)^2}{b^2} = \\ &= \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{a^2} = 1. \end{aligned}$$

Следовательно, точка  $P_1$  находится на эллипсе.

Таким образом, эллипс (1) можно получить из окружности (2) равномерным сжатием к оси  $OX$ , при котором ординаты точек уменьшаются в одном и том же отношении, равном  $\frac{b}{a}$ .

Отсюда следует, что форма эллипса зависит от значения отношения  $\frac{b}{a}$ ; чем меньше это отношение, тем более сжатым будет эллипс, и, наоборот, чем больше отношение  $\frac{b}{a}$ , тем эллипс будет менее сжатым, более округлым. При значениях отношения  $\frac{b}{a}$ , близких к единице, эллипс будет мало отличаться от окружности. При наибольшем значении отношения  $\frac{b}{a}$ , т. е. при  $\frac{b}{a} = 1$ , эллипс превращается в окружность.

В качестве характеристики формы эллипса удобнее пользоваться не отношением  $\frac{b}{a}$ , а отношением  $\frac{c}{a}$ . Отно-

шение полуфокусного расстояния  $c$  к большой полуоси  $a$  называется *эксцентриситетом* эллипса. Эксцентриситет обозначается буквой  $\epsilon$ .

Таким образом,

$$\epsilon = \frac{c}{a}.$$

Так как  $0 \leq c < a$ , то эксцентриситет эллипса удовлетворяет неравенствам

$$0 \leq \epsilon < 1.$$

Выразим эксцентриситет эллипса через отношение  $\frac{b}{a}$  полуосей эллипса:

$$\epsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a},$$

откуда

$$\epsilon = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}. \quad (3)$$

Из полученной формулы видно, что меньшим значениям отношения  $\frac{b}{a}$  соответствуют большие значения эксцентриситета. Поэтому чем больше эксцентриситет, тем сильнее сжат эллипс. При малых значениях эксцентриситета эллипс мало отличается от окружности. При  $\epsilon = 0$  эллипс превращается в окружность. Эксцентриситет окружности, таким образом равен нулю.

**Задача 1.** Построить эллипсы

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Для каждого эллипса вычислить его эксцентриситет.

$\Delta$  По данным уравнениям находим полуоси эллипсов:  $a_1 = 5$ ,  $b_1 = 4$  и  $a_2 = 5$ ,  $b_2 = 3$ . Отмечаем на чертеже (рис. 77) вершины первого эллипса: точки  $A_1(5; 0)$ ,  $B_1(0; 4)$ ,  $C_1(-5; 0)$ ,  $D_1(0; -4)$ . Две вершины второго эллипса находятся в точках  $A_1$  и  $C_1$ , две другие вершины — в точках  $B_2(0; 3)$  и  $D_2(0; -3)$ .

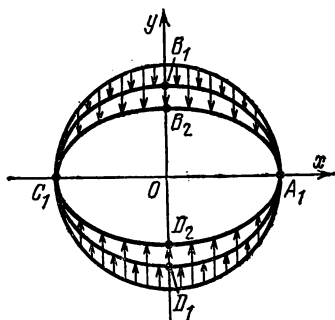


Рис. 77



Построим окружность  $x^2 + y^2 = 25$ . Точки первого эллипса получим сдвигом к оси  $OX$  точек этой окружности, при котором ординаты уменьшаются в отношении  $\frac{b_1}{a_1} = \frac{4}{5}$ . Точки второго эллипса получим сдвигом точек окружности, при котором ординаты уменьшаются в отношении  $\frac{b_2}{a_2} = \frac{3}{5}$ . Заметим, что достаточно получить точки эллипса в одном из квадрантов координатной плоскости, а затем воспользоваться симметрией эллипса относительно осей координат. На рис. 77 первый эллипс изображен кривой  $A_1B_1C_1D_1$ , второй — кривой  $A_2B_2C_2D_2$ .

Эксцентриситеты эллипсов находим по формуле (3):

$$\varepsilon_1 = \sqrt{1 - \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5},$$

$$\varepsilon_2 = \sqrt{1 - \left(\frac{b_2}{a_2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}.$$

У второго эллипса эксцентриситет больше, чем у первого; второй эллипс сильнее сжат к своей большой оси.

**Замечание.** Эллипс  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  можно построить и теми методами, которые изучаются в алгебре и началах анализа. Для этого следует разрешить уравнение эллипса относительно переменной  $y$  и построить графики функций  $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$  и  $y = -\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ . Разумеется, достаточно построить график одной из этих функций и затем воспользоваться симметрией эллипса относительно оси  $Ox$ .

5) Эллипс (1) может быть задан параметрическими уравнениями

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t, \quad 0 \leq t < 2\pi. \quad (4)$$

В предыдущем пункте было доказано, что если точка  $P(X; Y)$  лежит на окружности радиуса  $R = a$  с центром в начале координат, то точка  $P_1(x; y)$ , где  $x = X$ ,  $y = \frac{b}{a} Y$ , лежит на эллипсе (1) (см. рис. 76). Координаты точек окружности радиуса  $R = a$  с центром в начале координат выражаются через величину  $t$  угла между радиус-вектором точки  $P$  и осью  $Ox$  следующим образом:

$$X = a \cos t, \quad Y = a \sin t, \quad 0 \leq t < 2\pi.$$

Следовательно, координаты  $x$  и  $y$  точек эллипса выражаются через тот же параметр  $t$  уравнениями (4).

Действительно,

$$x = X = a \cos t,$$

$$y = \frac{b}{a} Y = \frac{b}{a} a \sin t = b \sin t, \quad 0 \leq t < 2\pi.$$

При  $a=b$  получаем параметрические уравнения окружности.

**Задача 2.** Дан эллипс  $9x^2 + 16y^2 = 144$ . Написать его параметрические уравнения.

△ Приведем уравнение эллипса к каноническому виду:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1,$$

откуда  $a^2 = 16$ ,  $b^2 = 9$ , и, следовательно,  $a = 4$ ,  $b = 3$ . По формулам (4) получаем параметрические уравнения

$$x = 4 \cos t, \quad y = 3 \sin t. \quad \blacktriangle$$

**Задача 3.** Даны параметрические уравнения эллипса

$$x = 5 \cos t, \quad y = 3 \sin t.$$

Записать его каноническое уравнение.

△ В данном случае получаем  $a = 5$ ,  $b = 3$ . Следовательно, каноническим уравнением эллипса будет уравнение

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1. \quad \blacktriangle$$

### Вопросы для контроля

1. Что называется окружностью?
2. Какой вид имеет общее уравнение окружности? Какое уравнение окружности называется каноническим?
3. Как записываются параметрические уравнения окружности с центром в начале координат?
4. Что называется эллипсом?
5. Какие точки плоскости называются фокусами эллипса? Сколько фокусов у эллипса? Как называется расстояние между фокусами?
6. Какой вид имеет каноническое уравнение эллипса?
7. Какие точки эллипса называются его вершинами?
8. Что называется большой осью и малой осью эллипса?
9. Что называется полуосями эллипса?
10. Имеет ли эллипс оси симметрии? Есть ли у него центр симметрии?
11. Как можно получить эллипс из окружности?

12\*. Что называется эксцентриситетом эллипса? Чему равен эксцентриситет окружности?

13. Как записываются параметрические уравнения эллипса?

### Упражнения

3.1. Составьте уравнение окружности:

- 1) радиуса  $R=4$  с центром в начале координат;
- 2) радиуса  $R=\frac{4}{3}$  с центром в начале координат;
- 3) радиуса  $R=5$  с центром в точке  $C(-4; 2)$ ;
- 4) радиуса  $R=\frac{7}{5}$  с центром в точке  $D\left(-1; -\frac{3}{5}\right)$ .

3.2. Найдите центр и радиус окружности:

- 1)  $x^2 + y^2 = 36$ ;
- 2)  $x^2 + y^2 = 7$ ;
- 3)  $(x-5)^2 + (y-3)^2 = 49$ ;
- 4)  $(x+7)^2 + \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 = 64$ ;
- 5)  $(x-2,5)^2 + y^2 = 50$ .

3.3. Докажите, что данное уравнение является уравнением окружности. Найдите ее центр и радиус:

- 1)  $x^2 - 2x + 4y + y^2 - 20 = 0$ ;
- 2)  $x^2 - 6x + 10y + y^2 + 9 = 0$ .

3.4. Составьте уравнение окружности, центр которой совпадает с началом координат, если окружность касается прямой  $x=3$ .

3.5. Напишите уравнение окружности, центр которой находится в точке  $C(3; 7)$ , если известно, что она касается оси  $Ox$ .

3.6. Напишите уравнение окружности, центр которой находится в точке пересечения прямых  $2x+3y-13=0$ ,  $x+y-5=0$ , если она касается оси ординат.

3.7. Напишите уравнение окружности, проходящей через точку  $N(6; 2)$  с центром в точке  $C(2; -1)$ .

3.8. Напишите уравнение окружности, центр которой лежит на оси абсцисс, если окружность касается прямых  $x=8$  и  $y=3$ .

3.9. Напишите уравнение окружности, если известно, что она касается оси абсцисс и прямых  $x=-1$  и  $x=5$ .

3.10. Напишите уравнение окружности, проходящей через точку  $M(2; 1)$  и касающейся осей координат.

3.11. Определите, как расположена точка  $M(-2; 1)$  относительно каждой из окружностей (внутри, вне или на окружности):

- 1)  $x^2 + y^2 = 2$ ;
- 2)  $x^2 + y^2 - 5 = 0$ ;
- 3)  $x^2 + y^2 = 25$ ;
- 4)  $x^2 + y^2 - 8x - 4y = 5$ ;
- 5)  $x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$ ;
- 6)  $x^2 + y^2 = 0,01$ .

3.12. Определите, как расположена прямая относительно окружности (пересекает, касается или проходит вне ее), если прямая и окружность заданы следующими уравнениями:

- 1)  $2x - y - 3 = 0$  и  $x^2 + y^2 - 3x + 2y - 3 = 0$ ;
- 2)  $x - 2y - 1 = 0$  и  $(x-4)^2 + (y+1)^2 = 5$ ;
- 3)  $x + 3y + 10 = 0$  и  $x^2 + y^2 = 1$ .

3.13. Найдите уравнение линии центров двух окружностей  $(x-2)^2 + y^2 = 16$  и  $x^2 + (y-3)^2 = 9$ .

3.14. Даны точки  $M_1(2; 3)$  и  $M_2(10; 9)$ . Напишите уравнение окружности, диаметром которой служит отрезок  $M_1M_2$ .

3.15. Окружность касается оси ординат в начале координат и проходит через точку  $M_1(-4; 0)$ . Напишите уравнение окружности и найдите точки пересечения ее с биссектрисами координатных углов.

3.16. Напишите уравнение окружности, проходящей через три точки  $M_1(0; 0)$ ,  $M_2(3; 0)$  и  $M_3(0; 4)$ .

3.17. Напишите уравнение окружности, описанной около треугольника, стороны которого принадлежат прямым  $x - 3y + 1 = 0$ ,  $9x - 2y - 41 = 0$ ,  $7x + 4y + 7 = 0$ .

3.18. Определите координаты точек пересечения прямой  $y - 7x - 12 = 0$  и окружности  $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$ .

3.19. Напишите уравнение диаметра окружности  $x^2 + y^2 = 25$ , перпендикулярного прямой  $4x + 3y - 25 = 0$ .

3.20. Вычислите кратчайшее расстояние от точки  $A(8; -6)$  до окружности  $x^2 + y^2 - 4 = 0$ .

3.21. Напишите уравнение окружности, проходящей через точки  $M(4; 1)$  и  $N(0; 5)$ , если известно, что центр ее находится на прямой  $x + y + 3 = 0$ .

3.22. Найдите уравнение окружности, симметричной окружности  $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$  относительно прямой  $y = x - 3$ .

3.23. Окружность задана уравнениями  $x = \sqrt{2} \cos t$ ,  $y = \sqrt{2} \sin t$ ,  $0 \leq t < 2\pi$ . Запишите каноническое уравнение этой окружности.

3.24. Окружность задана уравнением  $x^2 + y^2 = 25$ . Запишите параметрические уравнения этой окружности.

3.25. Окружности заданы уравнениями  $x = 4 \cos t$ ,  $y = 4 \sin t$  ( $0 \leq t < 2\pi$ ) и  $(x - 1)^2 + y^2 = 25$ . Найдите точки пересечения данных окружностей.

3.26. Напишите каноническое уравнение эллипса, если фокальное расстояние равно 8 и эллипс проходит через точку  $(0; -3)$ .

3.27. Напишите каноническое уравнение эллипса, если его фокус находится в точке  $(6; 0)$  и ось ординат эллипс пересекает в точке  $(0; -3)$ .

3.28. Докажите, что уравнение  $7x^2 + 16y^2 - 112 = 0$  является уравнением эллипса. Найдите координаты фокусов и фокальное расстояние.

3.29. Напишите каноническое уравнение эллипса, если:

1) его полуоси равны 7 и 3;

2) его полуоси равны 3 и 4;

3) его большая полуось равна 5, а фокусное расстояние равно 6;

4) его малая полуось равна 4, а фокусное расстояние равно 6.

3.30. Для каждого из следующих эллипсов определите его полуоси, координаты вершин и фокусов:

1)  $9x^2 + 16y^2 = 144$ ;    2)  $x^2 + 9y^2 = 4$ ;

3)  $4x^2 + 9y^2 = 1$ ;    4)  $0,25x^2 + y^2 = 1$ .

3.31. Дан эллипс  $4x^2 + 25y^2 - 100 = 0$ . Определите ординаты точек эллипса, абсциссы которых равны  $-3$ .

3.32. Ординаты точек окружности  $x^2 + y^2 = 36$  уменьшены в 3 раза по абсолютной величине. Напишите уравнение полученной новой кривой.

3.33. Дан эллипс  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ . Найдите его большую полуось, его малую полуось, фокальное расстояние, координаты фокусов и вершин.

3.34. Дан эллипс  $25x^2 + 49y^2 = 1225$ . Определите длины осей, координаты фокусов.

3.35. Напишите каноническое уравнение эллипса, если его большая полуось  $a=5$ , а эксцентриситет  $e=\frac{3}{5}$ .

3.36. Напишите каноническое уравнение эллипса, у которого расстояния от фокуса до концов большой оси равны 1 и 9.

3.37\*. Земля движется по эллиптической орбите, в одном из фокусов которой находится Солнце. Вычислите эксцентриситет земной орбиты, если ближайшая к Солнцу точка земной орбиты (перигелий) находится на расстоянии 147 млн. км от Солнца, а наиболее удаленная от Солнца точка орбиты (афелий) находится на расстоянии 152 млн. км от него.

3.38\*. 9 июля 1980 года в Советском Союзе произведен запуск одной ракетой-носителем восьми искусственных спутников Земли «Космос-1192-1199». Вычислите эксцентриситет орбиты этих искусственных спутников, если все восемь спутников движутся по эллиптической орбите, в одном из фокусов которой находится центр Земли. Максимальное расстояние от поверхности Земли 1552 км; минимальное расстояние от поверхности Земли 1451 км. Средний радиус Земли приблизительно равен 6371 км.

3.39 Напишите каноническое уравнение эллипса, если эллипс проходит через точку  $M(2; -2)$ , а его большая полуось равна 4.

3.40. Найдите эксцентриситет эллипса  $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$ .

3.41. Найдите каноническое уравнение эллипса, касающегося в концах своей большой оси окружности  $x^2 + y^2 = 100$ , если известно, что  $a=2b$ .

3.42. Вычислите площадь четырехугольника, две вершины которого находятся в фокусах эллипса  $9x^2 + 25y^2 - 225 = 0$ , а две другие вершины совпадают с концами его малой оси.

3.43. Сторона ромба равна 10. Через две противоположные его вершины проходит эллипс, фокусы которого совпадают с двумя другими вершинами ромба. Напишите уравнение эллипса, приняв диагонали ромба за оси координат, если координаты фокуса  $(8; 0)$ .

3.44. Определите длину хорды эллипса  $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$ , делящей угол между осями пополам.

3.45. Дан эллипс  $15x^2 + 25y^2 - 375 = 0$ . Через фокус проведен перпендикуляр к его большой оси. Определите расстояния от точек пересечения этого перпендикуляра с эллипсом до фокусов.

3.46. Составьте параметрические уравнения эллипса  $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$ .

3.47. Даны параметрические уравнения эллипса  $x=7\cos t$ ,  $y=\sin t$ . Запишите его каноническое уравнение.

3.48. Найдите уравнения касательных к эллипсу  $9x^2 - 25y^2 = 225$ , угловой коэффициент которых равен  $\frac{3}{5}$ .

3.49. Найдите точку касания прямой  $5x - 2y - 30 = 0$  с эллипсом  $75x^2 + 24y^2 - 1800 = 0$ .

3.50. Дан эллипс  $25x^2 + 36y^2 - 900 = 0$  и окружность  $x^2 + y^2 = 25$ . Найдите точки их пересечения.

3.51. Напишите уравнение касательной к эллипсу в точке  $(3; -3)$ , если его уравнение  $36x^2 + 12y^2 - 432 = 0$ .

## § 10. Гипербола и парабола

**1. Гипербола и ее каноническое уравнение.** Гиперболой называется множество точек плоскости, для каждой из которых модуль разности расстояний до двух данных точек плоскости постоянен и меньше расстояния между этими точками.

Данные точки называются *фокусами* гиперболы, а расстояние между ними — *фокальным расстоянием*.

Обозначим фокусы гиперболы буквами  $F_1$  и  $F_2$ . Пусть фокальное расстояние  $F_1F_2 = 2c$ .

Если  $M$  — произвольная точка гиперболы (рис. 78), то по определению гиперболы модуль разности  $F_1M - F_2M$  постоянен. Обозначив его через  $2a$ , получим

$$|F_1M - F_2M| = 2a. \quad (1)$$

Отметим, что по определению гиперболы  $2a < 2c$ , т. е.  $a < c$ .

Равенство (1) есть уравнение гиперболы.

Выберем систему координат так, чтобы ось абсцисс проходила через фокусы гиперболы; ось ординат проведем

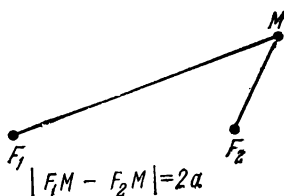


Рис. 78

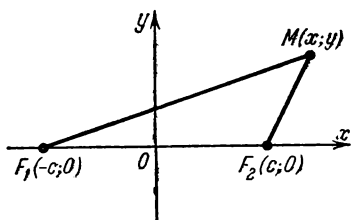


Рис. 79

через середину отрезка  $F_1F_2$  перпендикулярно ему (рис. 79). Тогда фокусами гиперболы будут точки  $F_1(-c; 0)$  и  $F_2(c; 0)$ .

Пусть  $M(x; y)$  — любая точка гиперболы, тогда

$$F_1M = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \quad \text{и} \quad F_2M = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Подставляя значения  $F_1M$  и  $F_2M$  в уравнение (1), получаем

$$|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}| = 2a. \quad (2)$$

Полученное нами уравнение представляет собой уравнение гиперболы в выбранной системе координат. Это уравнение можно привести к более простому виду.

Пусть  $x \geq 0$ , тогда уравнение (2) можно записать без знака модуля следующим образом:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a,$$

или

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2}. \quad (3)$$

Возведем обе части полученного равенства в квадрат:

$$(x+c)^2+y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2+y^2.$$

После соответствующих упрощений и преобразований:

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} = \frac{c}{a}x - a, \quad (4)$$

$$(x-c)^2+y^2 = \left(\frac{c}{a}x - a\right)^2,$$

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = \frac{c^2}{a^2}x^2 - 2cx + a^2,$$

приходим к уравнению

$$\frac{c^2 - a^2}{a^2}x^2 - y^2 = c^2 - a^2. \quad (5)$$

По определению гиперболы  $a < c$ , поэтому  $c^2 - a^2$  — положительное число. Обозначим его через  $b^2$ , т. е. положим  $b^2 = c^2 - a^2$ . Тогда уравнение (5) примет вид

$$\frac{b^2}{a^2}x^2 - y^2 = b^2.$$

Разделив почленно на  $b^2$ , получим уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (6)$$

Если  $x < 0$ , то уравнение (2) переписывается без знака модуля следующим образом:

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} - \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a,$$

и точно так же, как и в случае  $x \geq 0$ , преобразуется к виду (6).

Уравнение (6) называется *каноническим уравнением гиперболы*.

**Замечание.** Возведение в квадрат обеих частей уравнения (3) и (4) не нарушило равносильности уравнений. Обе части уравнения (3), очевидно, неотрицательны при всех значениях  $x$  и  $y$ . Левая часть уравнения (4) также всегда неотрицательна. При  $x \geq a$  правая часть

уравнения (4) положительна, так как

$$\frac{c}{a}x - a > \frac{c}{a}a - a = c - a > 0.$$

Итак, посторонние точки могли бы появиться только при условии  $0 \leq x < a$ , но из уравнения (6) следует, что  $\frac{x^2}{a^2} \geq 1$ , т. е.  $|x| \geq a$ .

**Задача 1.** Написать каноническое уравнение гиперболы, проходящей через точку  $M\left(-5; \frac{9}{4}\right)$ , если фокальное расстояние гиперболы равно 10.

△ Так как  $F_1F_2 = 10$ , то  $c = 5$ . Запишем каноническое уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

По условию точка  $M\left(-5; \frac{9}{4}\right)$  принадлежит гиперболе, следовательно,

$$\frac{25}{a^2} - \frac{81}{16b^2} = 1.$$

Второе уравнение для определения  $a^2$  и  $b^2$  дает соотношение

$$b^2 = c^2 - a^2 = 25 - a^2.$$

Решив систему

$$\begin{cases} \frac{25}{a^2} - \frac{81}{16b^2} = 1, \\ b^2 = 25 - a^2, \end{cases}$$

найдем  $a^2 = 16$ ,  $b^2 = 9$ . Искомым уравнением будет уравнение  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ . ▲

**Задача 2.** Доказать, что уравнение

$$20x^2 - 29y^2 = 580$$

является уравнением гиперболы. Найти координаты фокусов.

△ Разделив обе части уравнения на 580, получим

$$\frac{x^2}{29} - \frac{y^2}{20} = 1.$$

Это уравнение гиперболы, для которой  $a^2 = 29$ ,  $b^2 = 20$ . Из соотношения  $c^2 = a^2 + b^2$  находим  $c^2 = 29 + 20 = 49$ ,



$c=7$ . Следовательно, фокусы гиперболы находятся в точках  $F_1(-7; 0)$  и  $F_2(7; 0)$ . ▲

2. Исследование гиперболы по ее каноническому уравнению. Рассмотрим гиперболу, заданную в некоторой прямоугольной декартовой системе координат своим каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (1)$$

Отметим следующие свойства гиперболы:

1) Гипербола (1) не имеет общих точек с осью  $Oy$ , а ось  $Ox$  пересекает в двух точках.

Для определения координат точек пересечения гиперболы (1) с осью  $Oy$  нужно решить совместно их уравнения

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad x = 0.$$

Подставляя  $x=0$  в уравнение гиперболы, получим  $y^2 = -b^2$ , а это означает, что система не имеет решений. Следовательно, гипербола не пересекает ось ординат.

Для определения координат точек пересечения гиперболы (1) с осью  $Ox$  нужно решить совместно их уравнения

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad y = 0.$$

Точка пересечения гиперболы с осью  $Ox$  должна иметь ординату  $y=0$  и в то же время принадлежать гиперболе. Подставив  $y=0$  в уравнение гиперболы, получим

$$x = \pm a.$$

Итак, точками пересечения гиперболы (1) с осью  $Ox$  будут точки  $A(a; 0)$  и  $B(-a; 0)$ ; они называются *вершинами* гиперболы.

Отрезок  $AB$  называется *действительной осью* гиперболы. Длина отрезка  $AB$ , очевидно, равна  $2a$ . Число  $a$  называют *действительной полуосью* гиперболы, число  $b$  — *мнимой полуосью*.

2) Гипербола имеет две взаимно перпендикулярные оси симметрии.

В уравнение (1) переменные  $x$  и  $y$  входят только во второй степени. Следовательно, если координаты точки  $N(x; y)$  удовлетворяют уравнению (1), то этому же уравнению будут удовлетворять и координаты точек  $N_1(-x; y)$  и  $N_2(x; -y)$ .

Легко видеть, что точка  $N_1$  симметрична точке  $N$  относительно оси ординат, точка  $N_2$  симметрична точке  $N$  относительно оси абсцисс.

Таким образом, гипербола имеет две оси симметрии, они взаимно перпендикулярны.

3) Гипербола имеет центр симметрии.

Если координаты точки  $N(x; y)$  удовлетворяют уравнению (1), то этому же уравнению удовлетворяют и координаты точки  $K(-x; -y)$ . Точка  $K$ , очевидно, симметрична точке  $N$  относительно начала координат. Таким образом, гипербола имеет центр симметрии. Центр симметрии гиперболы называется *центром гиперболы*.

4) Гипербола (1) пересекается с прямой  $y=kx$  при  $|k| < \frac{b}{a}$  в двух точках. Если  $|k| \geq \frac{b}{a}$ , то общих точек у гиперболы и прямой нет.

Для определения координат точек пересечения гиперболы (1) и прямой  $y=kx$  нужно решить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ y = kx. \end{cases} \quad (2)$$

Исключая  $y$ , получаем

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{k^2 x^2}{b^2} = 1,$$

откуда

$$(b^2 - k^2 a^2) x^2 = a^2 b^2.$$

При  $b^2 - k^2 a^2 \leq 0$ , т. е. при  $|k| \geq \frac{b}{a}$ , полученное уравнение, а поэтому и система (2) решений не имеют. Следовательно, прямые, проходящие через начало координат с угловым коэффициентом, модуль которого больше или равен  $\frac{b}{a}$ , не пересекают гиперболу (1). Прямые, задаваемые уравнениями  $y = \frac{b}{a} x$  и  $y = -\frac{b}{a} x$ , называются *асимптотами гиперболы* (1).

При  $b^2 - k^2 a^2 > 0$ , т. е. при  $|k| < \frac{b}{a}$ , система (2) имеет два решения

$$x = \pm \frac{ab}{\sqrt{b^2 - k^2 a^2}}, \quad y = \pm \frac{kab}{\sqrt{b^2 - k^2 a^2}}. \quad (3)$$

Следовательно, каждая прямая, проходящая через начало координат с угловым коэффициентом, модуль которого меньше  $\frac{b}{a}$ , пересекает гиперболу (1) в двух точках (рис. 80). При  $k=0$  из формул (3) получаем  $x=\pm a$ ,

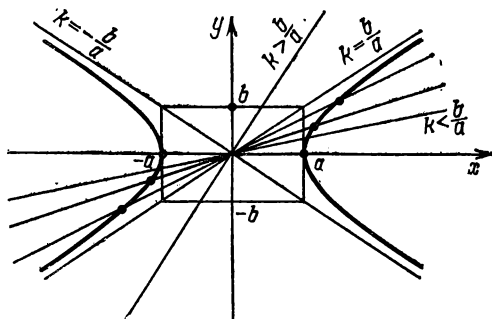


Рис. 80

$y=0$ , т. е. прямая  $y=0$  пересекает гиперболу в ее вершинах.

Так как гипербола симметрична относительно осей координат, то достаточно изучить ее форму в первом квадранте координатной плоскости. Из формул

$$x = \frac{ab}{\sqrt{b^2 - k^2 a^2}}, \quad y = \frac{kab}{\sqrt{b^2 - k^2 a^2}}, \quad k > 0,$$

видно, что при возрастании  $k$  от нуля до  $\frac{b}{a}$  (при этом прямая  $y=kx$  поворачивается против движения часовой стрелки) и абсциссы и ординаты точек пересечения прямой с гиперболой возрастают. Прямая  $y=kx$  пересекает гиперболу во все более далеких от начала координат точках. Таким образом, гипербола (1) имеет вид, изображенный на рис. 80. Она состоит из двух не связанных между собой частей, называемых ее *ветвями*.

**Замечание 1.** Гиперболу  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  можно построить и теми методами, которые изучаются в алгебре и началах анализа. Для этого следует разрешить уравнение гиперболы относительно переменной  $y$  и построить графики функций

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \quad \text{и} \quad y = -\frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}.$$

Достаточно построить график одной из этих функций и затем воспользоваться симметрией гиперболы относительно оси  $Ox$ .

Замечание 2\*. Можно уточнить расположение точек гиперболы (1) относительно ее асимптот  $y = \pm \frac{b}{a}x$ .

Найдем расстояние от точки гиперболы, расположенной в первом квадранте координатной плоскости, до прямой  $y = \frac{b}{a}x$ . Запишем ее уравнение в виде  $bx - ay = 0$ .

Задача определения расстояния от точки до прямой рассматривалась в § 8.

Пусть  $M(x_0; y_0)$  — точка гиперболы ( $x_0 > 0$ ,  $y_0 > 0$ ). Нормирующий множитель прямой  $bx - ay = 0$ , очевидно, равен

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{1}{c},$$

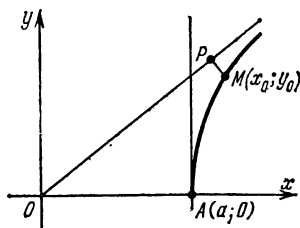


Рис. 81

а нормированное уравнение имеет вид  $\frac{bx - ay}{c} = 0$ . Следовательно, для искомого расстояния  $MP$  (рис. 81) получаем выражение

$$MP = \frac{|bx_0 - ay_0|}{c} = \frac{|b^2x_0^2 - a^2y_0^2|}{c(bx_0 + ay_0)}.$$

Так как  $M(x_0; y_0)$  — точка гиперболы (1), то  $b^2x_0^2 - a^2y_0^2 = a^2b^2$ . Поэтому

$$MP = \frac{a^2b^2}{c(bx_0 + ay_0)}.$$

Из полученной формулы следует, что если точка  $M(x_0; y_0)$  движется по гиперболе так, что ее абсцисса  $x_0$  неограниченно возрастает, то расстояние ее до прямой  $y = \frac{b}{a}x$  неограниченно убывает. В силу симметрии аналогичный вывод можно сделать и для других квадрантов плоскости.

Как мы уже видели (см. рис. 80), правая ветвь гиперболы расположена выше асимптоты  $y = -\frac{b}{a}x$  и ниже асимптоты  $y = \frac{b}{a}x$ . Поэтому отношение  $\frac{b}{a}$  полуосей гипер-

Солы определяет ее форму. Чем меньше это отношение, тем сильнее сжата к оси  $Ox$  гипербола. Как и в случае эллипса, для характеристики формы гиперболы удобнее пользоваться не отношением  $\frac{b}{a}$ , а отношением  $\frac{c}{a}$ .

Отношение полуфокусного расстояния  $c$  к действительной полуоси  $a$  называется *эксцентриситетом* гиперболы. Эксцентриситет обозначается буквой  $e$ . Таким образом,

$$e = \frac{c}{a}.$$

Так как для гиперболы  $c > a$ , то эксцентриситет гиперболы удовлетворяет неравенству  $e > 1$ .

Выразим эксцентриситет гиперболы через отношение  $\frac{b}{a}$  ее полуосей:  $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$ , т. е.

$$e = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}. \quad (4)$$

Формула (4) показывает, что меньшим значениям отношения  $\frac{b}{a}$  соответствуют меньшие значения эксцентриситета. Следовательно, чем меньше эксцентриситет гиперболы, тем сильнее сжата она к оси абсцисс.

**З а м е ч а н и е 3.** Гипербола называется *равносторонней* (или *равнобочной*), если длины ее полуосей равны между собой. Поскольку для равносторонней гиперболы  $a = b$ , уравнение ее имеет вид

$$x^2 - y^2 = a^2. \quad (5)$$

Асимптотами равносторонней гиперболы являются прямые  $y = x$  и  $y = -x$ . Таким образом, асимптоты равносторонней гиперболы взаимно перпендикулярны.

Вычислим эксцентриситет равносторонней гиперболы. По формуле (4) находим

$$e = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \sqrt{2}.$$

Равносторонняя гипербола изучалась в школе. Ее уравнение не имело вида (5), так как гипербола рассматривалась в другой системе координат. Об этом будет сказано в следующем параграфе.

**Задача 1.** Найти асимптоты гипербол

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} = 1.$$

Построить гиперболы. Для каждой гиперболы найти эксцентриситет.

△ Для первой гиперболы  $a_1=5$ ,  $b_1=4$ . Уравнения асимптот  $y=\frac{4}{5}x$  и  $y=-\frac{4}{5}x$ . Для второй гиперболы  $a_2=5$ ,  $b_2=2$ . Уравнения асимптот  $y=\frac{2}{5}x$  и  $y=-\frac{2}{5}x$ . Перед

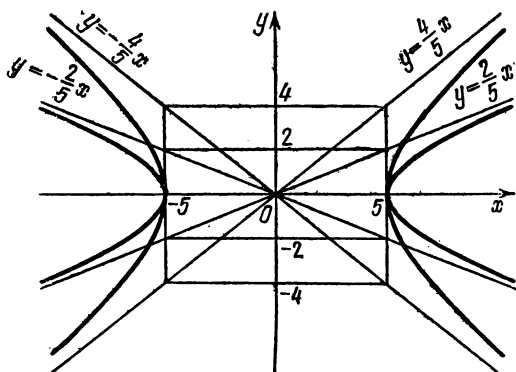


Рис. 82

тем как нарисовать гиперболу, следует построить ее асимптоты и отметить вершины гиперболы. На рис. 82 изображены обе гиперболы.

Эксцентриситеты гипербол находим по формуле (4):

$$e_1 = \sqrt{1 + \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{41}}{5},$$

$$e_2 = \sqrt{1 + \left(\frac{b_2}{a_2}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{29}}{5}.$$

У второй гиперболы эксцентриситет меньше, следовательно, вторая гипербола расположена ближе (сильнее сжата) к оси  $Ox$ , чем первая. ▲

Задача 2. Даны фокусы гиперболы  $F_1(-10; 0)$  и  $F_2(10; 0)$  и ее асимптота  $4x + 3y = 0$ . Написать уравнение гиперболы.

△ Записав уравнение асимптоты в виде  $y = -\frac{4}{3}x$ , находим отношение полуосей гиперболы  $\frac{b}{a} = \frac{4}{3}$ . Из условия задачи следует, что  $c=10$ . Поэтому  $a^2 + b^2 = 100$ .

Задача свелась к решению системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{b}{a} = \frac{4}{3}, \\ a^2 + b^2 = 100. \end{cases}$$

Подставляя  $b = \frac{4}{3}a$  во второе уравнение системы, получаем

$$a^2 + \frac{16a^2}{9} = 100,$$

откуда  $a^2 = 36$ . Теперь находим  $b^2 = \left(\frac{4}{3}a\right)^2 = \frac{16}{9} \cdot 36 = 64$ .

Следовательно, гипербола имеет уравнение  $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$ . ▲

**Задача 3.** Написать уравнение гиперболы, вершины которой находятся в фокусах эллипса

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1,$$

а фокусы — в вершинах того же эллипса. Сделать чертеж.

△ Обозначим через  $a_r$ ,  $b_r$  полуоси гиперболы, через  $c_r$  — ее полуфокусное расстояние. Пусть  $a_s$ ,  $b_s$  — полуоси

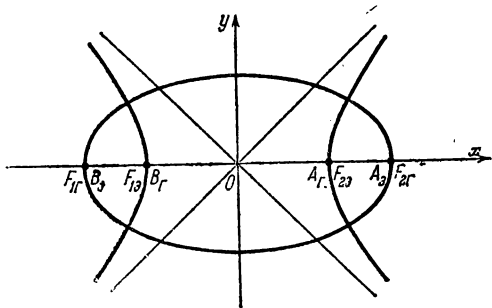


Рис. 83

эллипса,  $c_s$  — его полуфокусное расстояние. Для того чтобы составить уравнение гиперболы, нужно найти  $a_r^2$  и  $b_r^2$ . Из уравнения эллипса имеем  $a_s^2 = 25$ ,  $b_s^2 = 16$ . Из соотношения  $c_s^2 = a_s^2 - b_s^2$  находим  $c_s^2 = 25 - 16 = 9$ . По условию задачи  $a_r = c_s$  и  $c_r = a_s$ , следовательно,  $a_r^2 = c_s^2$  и  $c_r^2 = a_s^2$ . Поэтому  $a_r^2 = 9$  и  $c_r^2 = 25$ . Так как для гиперболы  $c_r^2 = a_r^2 + b_r^2$ , то  $b_r^2 = c_r^2 - a_r^2 = 25 - 9 = 16$ . Следовательно, искомое уравнение гиперболы таково:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1.$$

Чертеж дан на рис. 83. ▲

**3. Парабола и ее свойства.** *Параболой* называется множество точек плоскости, для каждой из которых расстояние до данной точки равно расстоянию до данной прямой, не проходящей через данную точку.

Данная точка называется *фокусом* параболы, данная прямая называется *директрисой* \*). Расстояние от фокуса до директрисы называется *фокальным параметром* параболы и обозначается через  $p$ .

Выберем систему координат следующим образом. Ось  $Ox$  проведем через фокус  $F$  перпендикулярно директрисе. Точку пересечения оси абсцисс с директрисой обозначим  $D$  (рис. 84), за начало координат  $O$  примем середину отрезка  $DF$ , за положительное направление оси  $Ox$  примем направление луча  $OF$ .

В выбранной системе координат фокус  $F$  имеет координаты  $(\frac{p}{2}; 0)$ , а директриса имеет уравнение

$$x + \frac{p}{2} = 0.$$

Пусть  $M(x; y)$  — любая точка искомого множества. Опустим из точки  $M$  перпендикуляр на директрису, и пусть  $N$  — основание этого перпендикуляра. Тогда  $MN$  есть расстояние от точки  $M$  до директрисы и, следовательно,

$$MF = MN.$$

Так как

$$MF = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}, \quad MN = \left|x + \frac{p}{2}\right|,$$

то

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|. \quad (1)$$

Полученное уравнение является уравнением параболы в выбранной системе координат. Это уравнение можно упростить.

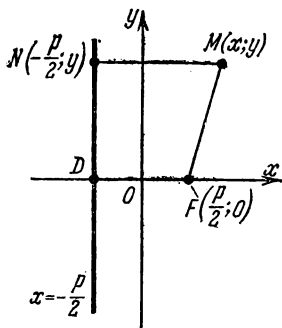


Рис. 84

\*) Слово «директриса» означает «направляющая».



Поскольку обе части уравнения (1) неотрицательны, то уравнение

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$$

равносильно исходному уравнению (1). После дальнейших очевидных преобразований

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$$

получим уравнение

$$y^2 = 2px. \quad (2)$$

Оно называется *каноническим уравнением параболы*.

Отметим следующие свойства параболы:

1) *Парабола имеет ось симметрии*.

Переменная  $y$  входит в уравнение (2) только во второй степени. Поэтому, если координаты точки  $N_1(x; y)$  удовлетворяют уравнению параболы, то и координаты точки  $N_2(x; -y)$  будут удовлетворять ему. Точка  $N_1$  симметрична точке  $N_2$  относительно оси  $Ox$ . Следовательно, ось  $Ox$  является осью симметрии параболы (2). Ось симметрии параболы называется *осью параболы*. Точка пересечения параболы с осью называется *вершиной параболы*. Вершина параболы (2) находится в начале координат.

2) *Парабола (2) расположена в полуплоскости  $x \geq 0$* .

Действительно, так как фокальный параметр  $p$  положителен, то уравнению (2) могут удовлетворять только точки с неотрицательными абсциссами, т. е. точки полуплоскости  $x \geq 0$ .

3) *Парабола (2) является объединением графиков функций  $y = +\sqrt{2px}$  и  $y = -\sqrt{2px}$  (рис. 85)*.

Для того чтобы убедиться в этом, достаточно разрешить уравнение (2) относительно переменной  $y$ .

**З а м е ч а н и е.** Форма параболы хорошо известна из курса восьмилетней школы, в котором парабола изучалась как график функции

$$y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma. \quad (3)$$

Отличие уравнений (2) и (3) параболы объясняется тем, что в различных системах координат одна и та же кривая задается разными уравнениями. В следующем параграфе этот вопрос освещается подробно.

**Задача 1.** Дана парабола  $y^2 = 3x$ . Найти точки параболы, расстояние от которых до фокуса равно 1.

△ Так как  $2p=3$ , то  $\frac{p}{2}=\frac{3}{4}$  и фокус параболы находится в точке  $F\left(\frac{3}{4}; 0\right)$ .

Пусть  $M(x; y)$ —искомая точка. Тогда, согласно условию,

$$\sqrt{\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+(y-0)^2}=1.$$

Следовательно, для нахождения координат точки  $M$  нужно решить систему уравнений

$$\begin{cases} \left(x-\frac{3}{4}\right)^2+y^2=1, \\ y^2=3x. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем

$$\begin{aligned} \left(x+\frac{3}{4}\right)^2=1, \quad x+\frac{3}{4}=1, \quad x=\frac{1}{4}, \\ y^2=3 \cdot \frac{1}{4}=\frac{3}{4}, \quad y=\pm \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Таким образом, существуют две точки, расстояние которых до фокуса равно 1:  $\left(\frac{1}{4}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  и  $\left(\frac{1}{4}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ . ▲

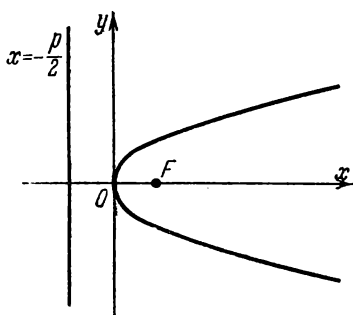


Рис. 85

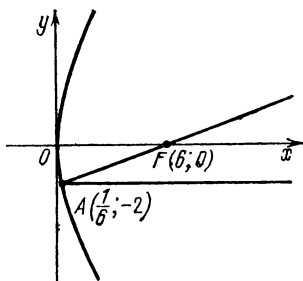


Рис. 86

**Задача 2.** Световой луч  $y=-2$  падает на зеркало, осевым сечением которого является парабола  $y^2=24x$  (рис. 86). Найти уравнение прямой, которой принадлежит отраженный луч.

△ Если падающий луч параллелен главной оптической оси параболического зеркала, то отраженный луч проходит через его фокус. В данном случае ось параболиче-

ского зеркала совпадает с осью  $Ox$ . Прямая  $y = -2$  параллельна оси абсцисс, и потому отраженный луч пройдет через фокус параболы  $y^2 = 24x$ . Так как  $2p = 24$ , т. е.  $\frac{p}{2} = 6$ , то фокусом параболы является точка  $F(6; 0)$ .

Для нахождения точки падения светового луча нужно решить систему уравнений

$$\begin{cases} y^2 = 24x, \\ y = -2. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем точку падения луча  $A\left(\frac{1}{6}; -2\right)$ . Отраженный луч принадлежит прямой, проходящей через точки  $\left(\frac{1}{6}; -2\right)$  и  $(6; 0)$ . Запишем уравнение этой прямой:

$$\frac{y-0}{-2-0} = \frac{x-6}{\frac{1}{6}-6}.$$

Из него получим  $12x - 35y - 72 = 0$ . ▲

Решение этой задачи иллюстрирует важное оптическое свойство, присущее параболическому зеркалу: если в его фокусе поместить источник света, то все его лучи, отражаясь от поверхности зеркала, образуют пучок лучей, параллельных оси параболы. Это свойство используется для изготовления прожекторов, автомобильных фар, антенн радиолокаторов и т. д.

### Вопросы для контроля

1. Что называется гиперболой?
2. Какие точки плоскости называются фокусами гиперболы? Сколько фокусов у гиперболы? Как называется расстояние между фокусами?
3. Какой вид имеет каноническое уравнение гиперболы?
4. Какие точки гиперболы называются ее вершинами?
5. Что называется действительной осью гиперболы?
6. Что называется действительной полуосью и мнимой полуосью гиперболы?
7. Имеет ли гипербола оси симметрии? Есть ли у нее центр симметрии?
8. Какие прямые называются асимптотами гиперболы?
- 9\*. Что называется эксцентриситетом гиперболы? Что характеризует эксцентриситет гиперболы?
10. Какая гипербола называется равнобочной (равносторонней)?
11. Что называется параболой?

12. Какая точка плоскости называется фокусом параболы? Что называется директрисой параболы? Что называется фокальным параметром параболы?

13. Какой вид имеет каноническое уравнение параболы?

14. Сколько осей симметрии имеет парабола? Есть ли у параболы центр симметрии?

15. Что называется вершиной параболы?

### Упражнения

3.52. Напишите каноническое уравнение гиперболы, если фокальное расстояние равно 30 и гипербола проходит через точку  $(-9; 0)$ .

3.53. Напишите каноническое уравнение гиперболы, если ее фокус находится в точке  $(-5\sqrt{2}; 0)$  и ось абсцисс гиперболы пересекает в точке  $(6; 0)$ .

3.54. Докажите, что уравнение  $11x^2 - 25y^2 - 275 = 0$  является уравнением гиперболы. Найдите координаты фокусов.

3.55. Определите полуоси каждой из следующих гипербол:

1)  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ ; 2)  $16x^2 - y^2 = 1$ ; 3)  $x^2 - 9y^2 = 9$ ;

4)  $16x^2 - 9y^2 = 1$ ; 5)  $x^2 - y^2 = 4$ ; 6)  $9x^2 - 16y^2 = 144$ .

3.56. Для гиперболы  $9x^2 - 16y^2 - 144 = 0$  найдите:

- 1) полуоси;
- 2) координаты фокусов;
- 3) координаты вершин;
- 4) уравнения асимптот.

3.57. Напишите каноническое уравнение гиперболы, если:

- 1) ее действительная полуось равна 4, а мнимая — 13;
- 2) фокальное расстояние равно 16, а мнимая полуось — 6;
- 3) фокальное расстояние равно 6, а  $e = 1,5$ ;

4) действительная полуось равна 8, а  $e = \frac{5}{4}$ ;

5) уравнение асимптоты  $y = \frac{3}{2}x$ , а действительная полуось равна 2;

6) мнимая полуось равна 3, а  $e = \frac{5}{4}$ .

3.58. Напишите каноническое уравнение гиперболы, если расстояния от одной из ее вершин до фокусов равны 9 и 1.

3.59. Дана гипербола  $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{36} = 1$ ; напишите уравнения параллельных прямых, ограничивающих часть плоскости, не содержащей ни одной точки гиперболы.

3.60. Найдите асимптоты гиперболы  $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$ . Постройте гиперболу.

3.61. Найдите асимптоты гиперболы  $x^2 - y^2 = 9$ . Постройте гиперболу.

3.62. Дано уравнение гиперболы  $9x^2 - 16y^2 = 144$ . Найдите координаты его фокусов, вершин и уравнение асимптот. Сделайте чертеж.

3.63. Составьте каноническое уравнение гиперболы, действительная полуось которой равна 5, а эксцентриситет 1,4.

3.64. Определите, при каком условии асимптоты гиперболы  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  будут взаимно перпендикулярны.

3.65. Составьте каноническое уравнение гиперболы, если уравнение ее асимптоты  $y = \frac{1}{2}x$ , а один из фокусов находится в точке  $(-5; 0)$ .

3.66. Напишите каноническое уравнение гиперболы, зная, что асимптоты ее имеют уравнения  $y = \pm 2x$ , а фокусное расстояние равно 10.

3.67. Дана гипербола  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ . Найдите точки пересечения гиперболы с прямыми:

- 1)  $x - y + 1 = 0$ ;
- 2)  $9x - 4y - 36 = 0$ ;
- 3)  $5x - 4y - 16 = 0$ .

3.68. Составьте уравнение гиперболы, фокусы которой находятся в вершинах эллипса  $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1$ , а вершины — в фокусах эллипса.

3.69. Фокусы гиперболы совпадают с фокусами эллипса  $9x^2 + 25y^2 - 225 = 0$ . Составьте уравнение гиперболы, если ее эксцентриситет равен 2.

3.70. Найдите уравнения касательных к гиперболе  $x^2 - y^2 = 1$ , угловой коэффициент которых равен 2.

3.71. Эксцентриситет траектории движения первой советской космической ракеты, запущенной в сторону Луны 2 января 1959 г., равен 1,05. Определите вид траектории ракеты.

3.72. Напишите уравнение параболы, если координаты фокуса  $(4; 0)$ , а уравнение директрисы  $x + 4 = 0$ .

3.73. Напишите каноническое уравнение параболы, проходящей через точку  $(5; 3)$ .

3.74. Дана парабола  $y^2 = 5x$ . Найдите точки параболы, расстояние от которых до фокуса равно 4.

3.75. Составьте каноническое уравнение параболы, у которой фокус находится в точке пересечения прямой  $2x - 5y - 8 = 0$  с осью абсцисс. Постройте эту параболу.

3.76. Составьте каноническое уравнение параболы, проходящей через точку  $N(9; 6)$ , определите угол  $\alpha = \angle(t; \overrightarrow{FN})$ , где  $F$  — фокус параболы.

3.77. Найдите точки пересечения параболы  $y^2 = 4x$  и прямых:

- 1)  $x = y$ ;
- 2)  $x = -y$ ;
- 3)  $x - 2y + 4 = 0$ ;
- 4)  $3x - 2y + 1 = 0$ .

Постройте чертеж.

3.78. Напишите уравнение касательной к параболе  $y^2 = 6x$  в точке  $(6; 0)$ .

3.79. Напишите уравнение окружности, центр которой совпадает с фокусом параболы  $y^2 = 8x$ , если известно, что окружность касается директрисы параболы. Определите координаты точек пересечения параболы и окружности и построьте чертеж.

## § 11. Неканонические уравнения эллипса, гиперболы и параболы

1. График уравнения  $xy = a$ ,  $a \neq 0$ . Из школьного курса известно, что уравнение

$$xy = a, \quad a \neq 0, \quad (1)$$

называется уравнением гиперболы и имеет график, изображенный на рис. 87.

Посмотрим, каким будет уравнение этой гиперболы в другой системе координат, в системе, которая получается из исходной поворотом базисных векторов на угол  $\alpha = 45^\circ$ .

В данном случае старые координаты  $x$  и  $y$  выражаются через новые  $x'$  и  $y'$  следующим образом:

$$\begin{cases} x = x' \cos 45^\circ - y' \sin 45^\circ, \\ y = x' \sin 45^\circ + y' \cos 45^\circ, \end{cases}$$

т. е.

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} (x' - y'), \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} (x' + y'). \end{cases}$$

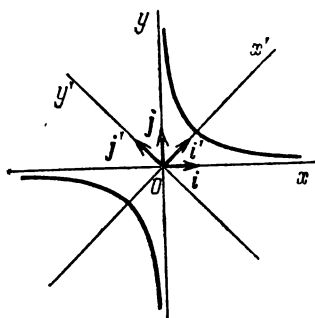


Рис. 87

Заменяя в уравнении (1) старые переменные новыми, получаем

$$\frac{\sqrt{2}}{2} (x' - y') \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} (x' + y') = a$$

или

$$x'^2 - y'^2 = 2a. \quad (2)$$

Мы получили каноническое уравнение равносторонней гиперболы. Следовательно, уравнение (1) задает равностороннюю гиперболу. Старые оси координат являются асимптотами гиперболы, поэтому уравнение (1) называют уравнением гиперболы, отнесенным к асимптотам (см. рис. 87). Сравнивая уравнения (1) и (2), видим, что действительная ось гиперболы, заданной уравнением (1), равна  $\sqrt{2a}$ .

Новая система координат  $O, i', j'$  называется *канонической*, так как в ней уравнение гиперболы имеет канонический вид.

Уравнение  $xy=a$ ,  $a < 0$ , приводится к каноническому виду аналогично. Для получения новых базисных векторов в этом случае следует повернуть старые базисные векторы на угол  $\alpha = -45^\circ$ .

**Задача 1.** Дано каноническое уравнение равноостронней гиперболы  $x^2 - y^2 = 18$ . Написать ее уравнение, отнесенное к асимптотам.

△ Выполним поворот на угол  $\alpha = -45^\circ$ . Тогда старые координаты выражаются через новые по формулам

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} (x' + y'), \\ y = -\frac{\sqrt{2}}{2} (x' - y'). \end{cases}$$

Подставив в данное уравнение значения  $x$  и  $y$ , получим

$$\frac{1}{2} (x' + y')^2 - \frac{1}{2} (x' - y')^2 = 18$$

или после упрощения  $x'y' = 9$ . ▲

**2. График уравнения  $y = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$ .** Вам хорошо знакомы уравнение

$$y = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0, \quad (1)$$

и его график: парабола с осью, параллельной оси ординат. Записав уравнение (1) в виде

$$y = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}, \quad (2)$$

находим координаты вершины параболы

$$x_0 = -\frac{b}{2a}, \quad y_0 = c - \frac{b^2}{4a}.$$

Перейдем к новой системе координат, направления осей которой совпадают с направлениями осей старой системы, а начало координат  $O'$  находится в вершине параболы. Точка  $O'$  имеет, следовательно, координаты  $\left( -\frac{b}{2a}; c - \frac{b^2}{4a} \right)$ . Тогда

$$\begin{cases} x = -\frac{b}{2a} + x', \\ y = c - \frac{b^2}{4a} + y', \end{cases}$$

где  $x'$ ,  $y'$  — новые координаты.

Заменяя в уравнении (2) старые координаты новыми, приходим к уравнению

$$y' = ax'^2, \quad a \neq 0.$$

Итак, если парабола в некоторой системе координат имеет уравнение (1), то всегда можно перейти к новой системе координат, в которой уравнение параболы будет иметь более простой вид:  $y' = ax'^2$ ,  $a \neq 0$ . Более того, всегда можно выбрать систему координат так, чтобы коэффициент в уравнении параболы был положительным. В самом деле, пусть  $a < 0$ , т. е. парабола расположена так, как показано на рис. 88. Тогда в системе  $O', i'', j''$ , которая

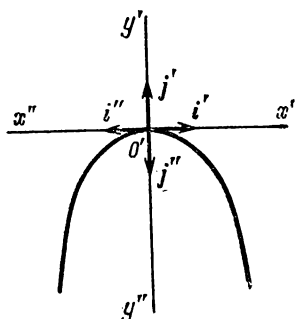


Рис. 88

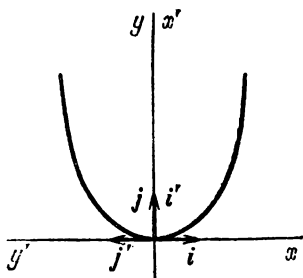


Рис. 89

получается из системы  $O', i', j'$  поворотом осей на угол  $\alpha = 180^\circ$ , уравнение параболы будет иметь вид  $y'' = -ax'^2$ . Полагая  $a_1 = -a$ , получаем  $y'' = a_1x'^2$ , где  $a_1 > 0$ .

Пусть в некоторой системе координат парабола задана уравнением

$$y = ax^2, \quad a > 0. \quad (3)$$

Перейдем к новой системе координат, которая получается из исходной поворотом базисных векторов на угол  $\alpha = 90^\circ$  (рис. 89). Формулы поворота в этом случае принимают вид

$$\begin{cases} x = x' \cos 90^\circ - y' \sin 90^\circ, \\ y = x' \sin 90^\circ + y' \cos 90^\circ \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = -y', \\ y = x'. \end{cases}$$

Заменяя в уравнении (3) старые координаты новыми, получаем

$$x' = ay'^2 \quad \text{или} \quad y'^2 = \frac{1}{a} x'.$$



Обозначим  $\frac{1}{a}$  через  $2p$ , тогда

$$y'^2 = 2px'.$$

Мы получили каноническое уравнение параболы.

Уравнением (3) задается парабола с фокальным параметром, равным  $\frac{1}{2a}$ .

Из полученных результатов следует, что фокальный параметр параболы, заданной уравнением  $y = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$ , равен  $\frac{1}{2|a|}$ .

**Задача.** Дано уравнение параболы

$$y = 2x^2 + 6x + 7.$$

Привести его к каноническому виду. Найти расстояние от фокуса параболы до ее директрисы.

△ Выделим полный квадрат в правой части данного уравнения

$$y = 2(x^2 + 3x) + 7 = 2\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{5}{2}.$$

Координаты вершины параболы  $\left(-\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$ .

Перейдем к новой системе координат, которая получается из исходной переносом начала координат в точку  $O'\left(-\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$  и поворотом базисных векторов на угол  $\alpha = 90^\circ$  (рис. 90). По формулам (3) п. 3 § 3 получаем

$$\begin{cases} x = -\frac{3}{2} + x' \cos 90^\circ - y' \sin 90^\circ = -\frac{3}{2} - y', \\ y = \frac{5}{2} + x' \sin 90^\circ + y' \cos 90^\circ = \frac{5}{2} + x'. \end{cases}$$

Подставив эти значения  $x$  и  $y$  в уравнение параболы, получим

$$\frac{5}{2} + x' = 2\left(-\frac{3}{2} - y' + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{5}{2},$$

т. е.  $x' = 2y'^2$ , или  $y'^2 = \frac{1}{2}x'$ .

Из полученного уравнения видно, что расстояние от фокуса параболы до директрисы (фокальный параметр) равно  $\frac{1}{4}$ . ▲

3. График уравнения  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ,  $0 < a < b$ . Это уравнение похоже на каноническое уравнение эллипса,

но не является таковым, так как в каноническом уравнении эллипса  $a \geq b$ .

Перейдем от системы координат  $Oxy$  к системе  $Ox'y'$ , которая получается из исходной системы поворотом базисных векторов на угол  $\alpha = 90^\circ$ . Формулы поворота в этом случае имеют вид

$$\begin{cases} x = -y', \\ y = x'. \end{cases}$$

Поэтому в новой системе данное уравнение запишется так:

$$\frac{x'^2}{b^2} + \frac{y'^2}{a^2} = 1, \quad a < b.$$

Мы получили каноническое уравнение эллипса. Следовательно, рассматриваемое уравнение задает эллипс, большая ось которого лежит на оси  $Oy$ , малая — на оси  $Ox$ .

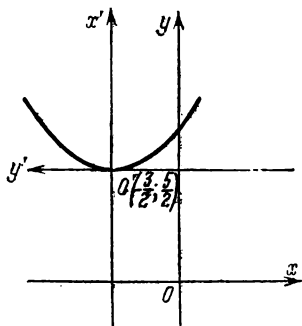


Рис. 90

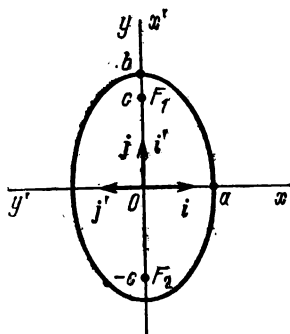


Рис. 91

Фокусы такого эллипса расположены в точках  $F_1(0; c)$  и  $F_2(0; -c)$ , где  $c = \sqrt{b^2 - a^2}$  (рис. 91).

**Задача 1.** Доказать, что кривая, заданная уравнением

$$25x^2 + 16y^2 - 50x + 64y - 311 = 0,$$

является эллипсом. Найти его полуоси и координаты фокусов. Дать чертеж.

△ Преобразуем данное уравнение к виду

$$25(x-1)^2 + 16(y+2)^2 = 400.$$

От системы координат  $Oxy$  перейдем к системе  $O'x'y'$ , сохранив направление осей, а начало координат поместив

в точку  $O'(1; -2)$ . Тогда старые и новые координаты будут связаны формулами переноса

$$\begin{cases} x = 1 + x', \\ y = -2 + y'. \end{cases}$$

Поэтому в новой системе координат кривая имеет уравнение

$$25x'^2 + 16y'^2 = 400$$

или

$$\frac{x'^2}{16} + \frac{y'^2}{25} = 1.$$

Итак, данная кривая является эллипсом, полуоси которого равны 5 и 4. Полуфокусное расстояние  $c = \sqrt{25 - 16} = 3$ . Фокусы эллипса в новой системе имеют координаты  $(0; 3)$  и  $(0; -3)$ . По формулам переноса находим их координаты в старой системе:  $(1; 1)$  и  $(1; -5)$ . Чертеж дан на рис. 92.

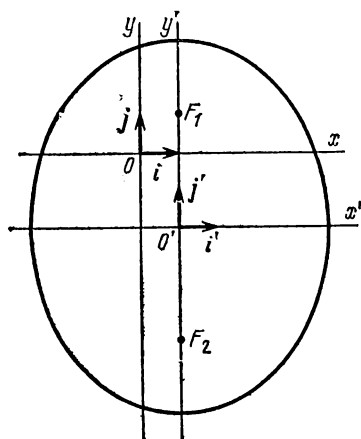


Рис. 92

**Задача 2.** Написать уравнение эллипса, одна ось которого принадлежит оси ординат и равна 12, а другая ось принадлежит оси абсцисс и равна 8.

$\Delta$  По условию задачи  $b = 6$ ,  $a = 4$ , следовательно,

$$\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{6^2} = 1$$

или 
$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1. \blacktriangle$$

**Задача 3.** Написать уравнение эллипса, одна ось которого принадлежит оси ординат и равна 20, а расстояние между фокусами равно 16. Центр эллипса находится в точке  $(0; 0)$ .

$\Delta$  Искомое уравнение эллипса можно записать в виде  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Так как  $2a = 16$ ,  $2b = 20$ , то  $c = 8$ ,  $b = 10$ , а так как фокусы расположены на оси  $Oy$ , то  $a^2 = b^2 - c^2 = 100 - 64 = 36$ . Следовательно, эллипс имеет уравнение

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{100} = 1. \blacktriangle$$

**Задача 4.** Найти длины полуосей эллипса  $25x^2 + 16y^2 = 400$  и вычислить координаты его фокусов.

△ Запишем данное уравнение в виде

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1.$$

Следовательно,  $a^2 = 16$ ,  $b^2 = 25$  и  $c = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{25 - 16} = 3$ . В результате имеем  $a = 4$ ,  $b = 5$ ,  $F_1(0; 3)$ ,  $F_2(0; -3)$ . ▲

**4\*. Общее уравнение второго порядка с двумя переменными.** В главе 2 мы исследовали общее уравнение первого порядка с двумя переменными, т. е. уравнение вида

$$Ax + By + C = 0, \quad A^2 + B^2 \neq 0. \quad (1)$$

Мы установили, что множеством всех точек плоскости, координаты которых  $x$  и  $y$  удовлетворяют уравнению (1), является прямая.

Общее уравнение второго порядка с двумя переменными имеет вид

$$\begin{aligned} Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \\ A^2 + B^2 + C^2 \neq 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Возникает естественный вопрос, что представляет собой множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению (2)? Другими словами, какие множества точек плоскости могут задаваться этим уравнением?

Покажем, что существует 8 различных типов таких множеств.

□ 1) Положив в уравнении (2)

$$A = \frac{1}{a^2}, \quad C = \frac{1}{b^2}, \quad F = -1, \quad B = D = E = 0,$$

получим

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Итак, уравнение (2) может быть уравнением эллипса.

2) Положив в уравнении (2)

$$A = \frac{1}{a^2}, \quad C = -\frac{1}{b^2}, \quad F = -1, \quad B = D = E = 0,$$

получим

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Следовательно, уравнение (2) может быть уравнением гиперболы.

3) Если в уравнении (2) положить

$$C=1, \quad D=-2p, \quad A=B=E=F=0,$$

то получим

$$y^2=2px.$$

Уравнение (2) может быть уравнением параболы.

4) Если в уравнении (2) выбрать коэффициенты следующим образом:

$$A=a^2, \quad C=-b^2, \quad B=D=E=F=0,$$

то оно примет вид

$$a^2x^2-b^2y^2=0.$$

Так как  $a^2x^2-b^2y^2=(ax-by)(ax+by)$ , то это уравнение является уравнением двух прямых:

$$ax-by=0 \quad \text{и} \quad ax+by=0.$$

Таким образом, уравнением (2) может задаваться пара пересекающихся прямых.

5) Взяв в уравнении (2)

$$C=1, \quad F=-a^2, \quad A=B=D=E=0,$$

получим

$$y^2-a^2=0,$$

т. е. уравнение двух прямых  $y=a$  и  $y=-a$ .

Следовательно, уравнение (2) может быть уравнением двух параллельных прямых.

6) Положив в уравнении (2)

$$C=1, \quad A=B=D=E=F=0,$$

получим

$$y^2=0.$$

Такое уравнение принято считать уравнением пары совпавших прямых, так как из него следует, что  $y \cdot y=0$  и, приравнявая каждый множитель нулю, получаем  $y=0$  и  $y=0$ . Итак, уравнением (2) может быть задана пара совпавших прямых.

7) Если в уравнении (2) возьмем

$$A=a^2, \quad C=b^2, \quad B=D=E=F=0,$$

то получим

$$a^2x^2+b^2y^2=0.$$

Этому уравнению удовлетворяют координаты только одной точки плоскости, а именно точки  $(0; 0)$ .

Отсюда следует, что уравнение (2) может задавать точку.

8) Положив в уравнении (2)

$$A = \frac{1}{a^2}, \quad C = \frac{1}{b^2}, \quad F = 1, \quad B = D = E = 0,$$

получим

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1.$$

Этому уравнению не удовлетворяют координаты ни одной точки плоскости. То же получится и в случае, когда

$$C = 1, \quad F = a^2 \neq 0, \quad A = B = D = E = 0.$$

На плоскости нет точек, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$y^2 + a^2 = 0.$$

Таким образом, уравнение (2) может быть уравнением пустого множества. ■

Мы показали, что уравнение (2) может быть уравнением следующих геометрических фигур: 1) эллипса, 2) гиперболы, 3) параболы, 4) пары пересекающихся прямых, 5) пары параллельных прямых, 6) пары совпавших прямых, 7) точки, 8) пустого множества. Замечательно то, что, кроме восьми перечисленных типов множеств, не существует других множеств, уравнения которых имели бы вид (2). Это вытекает из следующего утверждения, которое мы примем без доказательства.

Пусть множество точек плоскости задается в некоторой системе координат уравнением (2). Тогда всегда можно перейти (с помощью формул (3) п. 3 § 3) к новой системе координат, в которой это уравнение будет иметь один из следующих девяти видов:

$$\begin{aligned} 1) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1; & 2) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &= 1; & 3) \quad y^2 &= 2px; \\ 4) \quad a^2x^2 - b^2y^2 &= 0; & 5) \quad y^2 - a^2 &= 0; & 6) \quad y^2 &= 0; \\ 7) \quad a^2x^2 + b^2y^2 &= 0; & 8) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= -1; & 9) \quad y^2 + a^2 &= 0. \end{aligned}$$

Уравнения 1)–9) называются каноническими.

Множества, определяемые уравнениями 4) — 6), состоят из прямых. Прямые изучались в главе 2. Множества, определяемые уравнениями 7) — 9) (точка и пустое множество), не представляют интереса.

Уравнения 1) — 3) определяют эллипс, гиперболу и параболу. Эти кривые имеют большое значение для космонавтики и астрономии, механики и архитектуры. С ними были знакомы еще древние греки. Греческие математики не знали ни метода координат, ни уравнений, тем не менее все свойства эллипса, гиперболы и параболы были им хорошо известны. Они получали и изучали эти кривые как плоские сечения конической поверхности. С тех пор эллипс, гиперболу и параболу называют *коническими сечениями*. Есть у эллипса, гиперболы и параболы и другое общее название. Уравнения этих кривых обязательно содержат по крайней мере одно слагаемое второго порядка  $x^2$ ,  $y^2$  или  $xy$ . Поэтому эллипс, гиперболу и параболу называют *кривыми второго порядка*.

На протяжении всей истории развития науки и техники кривые второго порядка неизменно привлекали к себе внимание многих исследователей и ученых. Это объясняется тем, что эллипс, гипербола и парабола очень часто встречаются в окружающих нас явлениях природы и человеческой деятельности. Приведем лишь некоторые примеры. Камень или снаряд, выпущенный под острым углом к горизонту, летит по кривой, близкой к параболе (форма кривой немного искажается из-за сопротивления воздуха). Для устройства разнообразных прожекторов и антенн используются так называемые «параболические зеркала». На производстве в некоторых механизмах применяются «эллиптические зубчатки». Часто две величины бывают связаны между собой обратно пропорциональной зависимостью (например, давление и объем газа согласно закону Бойля — Мариотта). Графиком такой функциональной зависимости является гипербола.

Особенно большое научное значение кривые второго порядка приобрели после открытий немецкого астронома Иоганна Кеплера (1571—1630) и английского физика и математика Исаака Ньютона (1643—1727). Кеплер, наблюдая за видимыми перемещениями планет на небесной сфере, открыл три закона, один из которых устанавливает, что каждая планета движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце. Ньютон не только теоретически обосновал законы движения планет, но и доказал, что каждое тело под действием притяжения другого тела

может двигаться только либо по эллипсу, либо по параболе, либо по гиперболе. В частности, по этим кривым происходит движение всех комет Солнечной системы.

В наше время, когда вокруг Земли вращаются по эллиптическим орбитам тысячи искусственных спутников, когда к Луне, Венере, Марсу отправлены десятки космических станций, кривые второго порядка используются еще интенсивнее, чем прежде.

### Вопросы для контроля

1. Какой кривой является график уравнения  $xy=a$ ?
2. Какой кривой является график уравнения  $y=ax^2+bx+c$ ?
3. Какой вид имеет уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси  $Oy$ ?
4. Какие множества точек на плоскости могут задаваться уравнением второго порядка с двумя переменными?
5. Что называется коническими сечениями?
6. Почему эллипс, гипербола и парабола называются кривыми второго порядка?

### Упражнения

3.80. Приведите уравнение эллипса  $\frac{(x+6)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$  к каноническому виду.

3.81. Дана гипербола  $xy=2$ . Приведите ее уравнение к каноническому виду.

3.82. Приведите уравнение параболы  $3y=x^2+4x-11$  к каноническому виду.

3.83. Для каждого из следующих эллипсов определите его полуоси, координаты вершин и координаты фокусов:

- 1)  $12x^2+5y^2-60=0$ ;
- 2)  $16x^2+9y^2-144=0$ ;
- 3)  $4x^2+y^2=9$ .

3.84. Напишите уравнение эллипса, симметрично расположенного относительно осей координат с фокусами на оси  $Oy$ , если:

- 1) его полуоси равны 3 и 4;
- 2) его полуоси равны 6 и 3;
- 3) его большая полуось равна 8, а фокусное расстояние равно 6;
- 4) его малая полуось равна 6, а фокусное расстояние равно 8.

3.85. Напишите уравнение эллипса, у которого сумма полуосей равна 8 и расстояние между фокусами равно 8. Фокусы лежат на оси ординат и расположены симметрично относительно точки  $(0; 1)$ .

3.86. Дан эллипс  $16x^2+7y^2-112=0$ . Определите координаты точек эллипса, расстояние которых до фокуса равно 2,5.

3.87. Окружность  $(x-5)^2+(y-3)^2=4$  касается эллипса и проходит через его фокусы. Составьте уравнение эллипса, если его большая ось параллельна оси абсцисс.



**3.88.** Составьте уравнение гиперболы, расположенной симметрично относительно осей координат, с фокусами на оси ординат, если:

1) полуоси равны 3 и 6;

2) уравнение асимптоты  $y = \frac{12}{5}x$ , а действительная полуось равна 24.

**3.89.** Для гиперболы  $9x^2 - 16y^2 = -144$  найдите: 1) полуоси; 2) координаты вершин; 3) координаты фокусов; 4) уравнения асимптот.

**3.90.** Напишите уравнение гиперболы, у которой расстояние между вершинами равно 24, а фокусы имеют координаты  $(-10; 2)$  и  $(16; 2)$ .

**3.91.** Составьте уравнение гиперболы, если ее полуоси равны 5 и 4, центр имеет координаты  $(3; 2)$ , а действительная ось параллельна оси абсцисс.

**3.92.** Напишите уравнение параболы с вершиной в начале координат, если:

1) парабола расположена в верхней полуплоскости симметрично относительно оси ординат и фокальный параметр равен 4;

2) парабола расположена в нижней полуплоскости симметрично относительно оси ординат и фокальный параметр равен 6;

3) парабола расположена в правой полуплоскости симметрично относительно оси абсцисс, а ее фокальный параметр равен 3;

4) парабола расположена в левой полуплоскости симметрично относительно оси абсцисс, а ее фокальный параметр равен 5.

**3.93.** Напишите уравнение параболы, проходящей через начало координат и симметричной относительно оси ординат, если координаты фокуса  $F(0; -3)$ .

**3.94.** Фокус параболы имеет координаты  $F(-6; 0)$ , а уравнение директрисы  $x - 6 = 0$ . Составьте уравнение параболы.

**3.95.** Найдите уравнение параболы, зная, что ее вершина находится в точке  $A(-4; 5)$ , а фокус в точке  $B(-2; 5)$ . Напишите уравнение ее оси и директрисы.

**3.96.** Дан фокус параболы  $(-3; -4)$  и уравнение ее директрисы  $x + 1 = 0$ . Напишите уравнение параболы и найдите точки пересечения параболы с осями координат.

**3.97.** Определите координаты точки, которая лежит на параболе  $x^2 = 8y$ , если расстояние до этой точки от директрисы равно 4.

**3.98.** Постройте на одном чертеже следующие параболы:  $x^2 = \frac{1}{2}y$ ,  $x^2 = y$ ,  $x^2 = 2y$ .

**3.99.** Фокус параболы лежит в точке  $F(0; \frac{1}{4})$ , директриса параллельна оси абсцисс и отсекает на оси ординат отрезок, длина которого равна  $\frac{1}{4}$ . Напишите уравнение параболы.

**3.100.** Парабола проходит через точки  $A(0; 6)$  и  $B(4; 0)$  симметрично относительно оси абсцисс. Напишите уравнение параболы и построьте ее.

**3.101.** Составьте уравнение параболы и напишите уравнение ее директрисы, если парабола проходит через точки пересечения прямой  $y = x$  и окружности  $x^2 + y^2 - 10y = 0$  и симметрична относительно оси ординат. Постройте окружность, прямую и параболу.

3.102. Напишите уравнение касательной к параболе  $x^2 = 6y$  в точке  $\left(2; \frac{2}{3}\right)$ .

3.103. Канат подвесного моста имеет форму параболы (рис. 93). Требуется составить ее уравнение относительно указанных на рисунке осей координат, если прогиб каната  $OA = 10$ , а длина моста  $BC = 60$ .

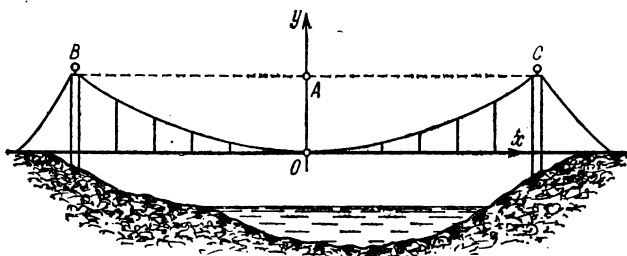


Рис. 93

3.104. Какое множество на плоскости задано следующими уравнениями второго порядка:

- 1)  $3x^2 + 4y^2 = 12$ ; 2)  $3x^2 - 4y^2 = 12$ ;
- 3)  $x^2 - 4y = 3$ ; 4)  $y^2 - 4x = 0$ ;
- 5)  $25x^2 - 9y^2 = 0$ ; 6)  $5y^2 - 125 = 0$ ;
- 7)  $36x^2 + 49y^2 = 0$ ; 8)  $x^2 + (y - 2)^2 = 7$ ;
- 9)  $5x^2 - 10x + 3y^2 + 6y + 7 = 0$ .

## ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

### § 12. Начальные понятия стереометрии

**1. Основные аксиомы стереометрии.** *Стереометрией* называется раздел геометрии, в котором изучаются фигуры, расположенные в пространстве. Основными понятиями стереометрии являются *точка, прямая и плоскость*.

Пространство состоит из бесконечного множества точек. Любое множество точек пространства называется *пространственной фигурой* или *телом*. Примерами пространственных фигур являются точка, прямая и плоскость. Прямые и плоскости состоят из бесконечного множества точек пространства и не совпадают со всем пространством.

Сформулируем основные *аксиомы стереометрии*. Напомним, аксиомы — это утверждения, принимаемые без доказательства. Аксиомы геометрии выражают основные свойства неопределяемых понятий: точек, прямых и плоскостей.

Будем предполагать, что для любой плоскости пространства выполняются все аксиомы, определения и теоремы планиметрии. Кроме того, будем предполагать справедливыми следующие аксиомы стереометрии:

1. *Через любые две различные точки проходит единственная прямая.*

2. *Если две различные точки прямой принадлежат плоскости, то все точки прямой принадлежат этой плоскости.*

3. *Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит одна и только одна плоскость.*

4. *Если две различные плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую.*

**2. Простейшие следствия из аксиом стереометрии.** Из первой аксиомы следует, что две различные прямые в пространстве или не имеют ни одной общей точки, или имеют только одну общую точку.

Прямые, имеющие только одну общую точку, называются *пересекающимися*.

Из второй аксиомы следует, что прямая и плоскость в пространстве или не имеют ни одной общей точки, или имеют только одну общую точку, или, наконец, все точки прямой являются точками плоскости.

Если прямая и плоскость имеют только одну общую точку, то говорят, что они *пересекаются*.

Если все точки прямой являются точками плоскости, то говорят, что прямая лежит в плоскости (принадлежит плоскости) или что плоскость проходит через прямую.

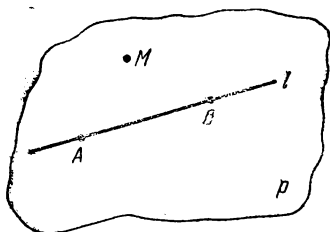


Рис. 94

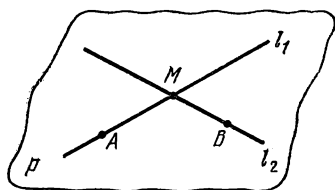


Рис. 95

**Теорема 1.** *Через прямую и не принадлежащую ей точку проходит единственная плоскость.*

□ Пусть заданы прямая  $l$  и не принадлежащая ей точка  $M$  (рис. 94). На прямой  $l$  возьмем какие-нибудь две точки  $A$  и  $B$ . По аксиоме 3 через три точки  $M$ ,  $A$ ,  $B$  проходит единственная плоскость; обозначим ее  $p$ . По аксиоме 2 все точки прямой  $l$  принадлежат плоскости  $p$ .

Следовательно, плоскость  $p$  проходит через прямую  $l$  и точку  $M$ . Другой такой плоскости нет, так как любая плоскость, проходящая через прямую  $l$  и точку  $M$ , проходит через три точки  $A$ ,  $B$ ,  $M$ , не лежащие на одной прямой, и поэтому совпадает с плоскостью  $p$ . ■

**Теорема 2.** *Через две пересекающиеся прямые проходит единственная плоскость.*

□ Пусть прямые  $l_1$  и  $l_2$  пересекаются в точке  $M$  (рис. 95). На прямых  $l_1$  и  $l_2$  возьмем какие-нибудь точки  $A$  и  $B$ , отличные от точки  $M$ . Тогда через три точки  $A$ ,  $B$ ,  $M$  проходит единственная плоскость  $p$ . В силу аксиомы 2 плоскость проходит через данные прямые  $l_1$  и  $l_2$ . ■

Из последних двух аксиом и теоремы 1 следует, что две различные плоскости или не имеют ни одной общей

точки, или имеют общую прямую и других общих точек не имеют.

Две различные плоскости, имеющие общую прямую, называются *пересекающимися*. Общая прямая называется *прямой пересечения* этих плоскостей.

**3. Перпендикулярные прямые в пространстве.** Так же, как и на плоскости, две прямые называются *перпендикулярными*, если они пересекаются под прямым углом. Отметим, что две перпендикулярные прямые всегда лежат в одной плоскости.

**Теорема.** *Через любую точку пространства, не лежащую на данной прямой, можно провести, и притом только одну, прямую, перпендикулярную данной прямой.*

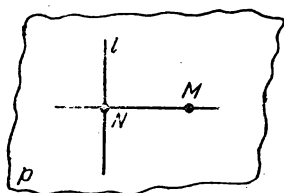


Рис. 96

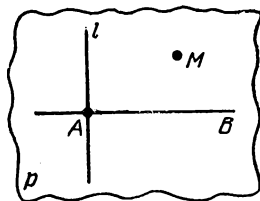


Рис. 97

□ Пусть заданы прямая  $l$  и точка  $M$  вне этой прямой. Через точку  $M$  и прямую  $l$  проведем плоскость  $p$  (рис. 96). В плоскости  $p$  из точки  $M$  опустим перпендикуляр  $MN$  на прямую  $l$ . Прямая  $MN$  проходит через точку  $M$  и перпендикулярна прямой  $l$ . Такая прямая единственная, так как она обязательно лежит в плоскости  $p$ , а в плоскости через данную точку проходит единственная прямая, перпендикулярная данной. ■

**Задача.** Доказать, что через любую точку прямой в пространстве можно провести перпендикулярную ей прямую.

△ Пусть заданы прямая  $l$  и точка  $A$  на этой прямой. Через прямую  $l$  и какую-нибудь точку  $M$ , не лежащую на  $l$ , проведем плоскость  $p$  (рис. 97). В плоскости  $p$  через точку  $A$  проведем прямую  $AB$ , перпендикулярную прямой  $l$ . ▲

Заметим, что так как точка  $M$  выбирается произвольно, то через данную точку  $A$  прямой  $l$  можно провести много прямых, перпендикулярных прямой  $l$ . В дальнейшем будет доказано, что все такие прямые лежат в одной плоскости.

## Вопросы для контроля

1. Что называется стереометрией? Назовите основные понятия стереометрии.
2. Что называется аксиомой? Сформулируйте основные аксиомы стереометрии.
3. Какие прямые называются пересекающимися?
4. Когда говорят, что прямая и плоскость пересекаются?
5. Когда говорят, что плоскость проходит через прямую?
6. Сколько плоскостей проходит через прямую и не принадлежащую ей точку?
7. Сколько плоскостей проходит через две пересекающиеся прямые?
8. Какие плоскости называются пересекающимися?
9. Какие прямые в пространстве называются перпендикулярными?
10. Сколько прямых можно провести в пространстве через данную точку перпендикулярно данной прямой? Чем отличаются случаи: точка лежит или не лежит на данной прямой?

## Упражнения

- 4.1. Докажите, что через любые три точки можно провести плоскость. В каком случае эта плоскость будет единственной?
- 4.2. Докажите, что если точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  не лежат в одной плоскости, то прямые  $AB$  и  $CD$  не пересекаются.
- 4.3. Если четыре точки не лежат в одной плоскости, то могут ли какие-то три из них лежать на одной прямой?
- 4.4. Докажите, что если прямые  $AB$  и  $CD$  не лежат в одной плоскости, то прямые  $AC$  и  $BD$  тоже не лежат в одной плоскости.
- 4.5. В пространстве даны четыре точки, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Через каждую пару данных точек проведена прямая. Сколько можно провести таких прямых?
- 4.6. В пространстве даны четыре точки, не лежащие в одной плоскости. Через каждые три из них проведена плоскость. Сколько таких плоскостей можно провести?
- 4.7. Докажите, что две прямые, перпендикулярные данной прямой, не могут пересекаться.

## § 13. Трехгранные и многогранные углы. Пирамиды

1. Трехгранные и многогранные углы. Пусть даны треугольник  $ABC$  и точка  $S$ , не принадлежащая плоскости треугольника, т. е. не лежащая в плоскости, проходящей через точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  (рис. 98). Объединение всех лучей, имеющих общее начало в точке  $S$  и пересекающих данный треугольник (рис. 99), называется *трехгранным углом*. Точка  $S$  называется *вершиной* этого трехгранного угла, лучи  $SA$ ,  $SB$ ,  $SC$  — его ребрами. Углы  $ASB$ ,  $BSC$ ,  $CSA$

называются его *гранями* или *плоскими углами*. Очевидно, величина каждого (из них больше  $0^\circ$  и меньше  $180^\circ$ , а радианная мера принадлежит интервалу  $(0; \pi)$ ).

Вообще, если даны плоский многоугольник  $ABC...N$  и точка  $S$ , не принадлежащая плоскости многоугольника,

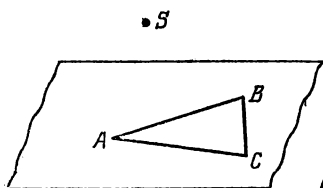


Рис. 98

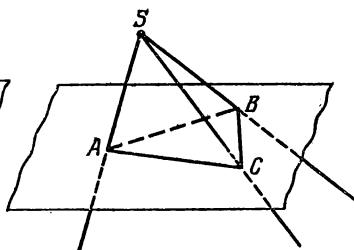


Рис. 99

то объединение всех лучей, имеющих общее начало в точке  $S$  и пересекающих данный многоугольник, называется *многогранным углом* (рис. 100). Точка  $S$  называется *вершиной* этого многогранного угла, лучи  $SA, SB, \dots, SN$  — его *ребрами*. Углы  $ASB, BSC, \dots$  называются его *гранями*

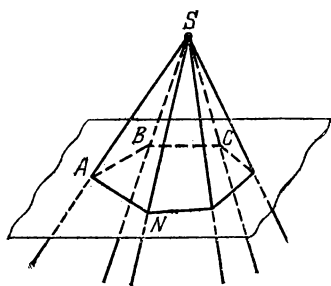


Рис. 100

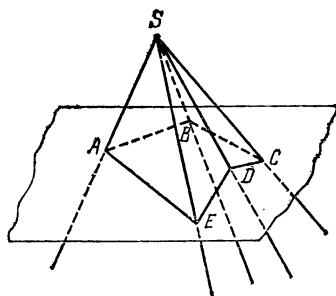


Рис. 101

или *плоскими углами*. Величина каждого плоского угла многогранного угла больше  $0^\circ$  и меньше  $180^\circ$ .

Многогранные углы называются *трехгранными*, *четырёхгранными* и т. д. в зависимости от числа граней. Обозначают многогранный угол одной буквой, указывающей его вершину, или несколькими буквами, указывающими вершину и по одной точке на каждом его ребре. Напри-

мер, трехгранный угол, изображенный на рис. 99, можно обозначить буквой  $S$  или буквами  $SABC$ .

Многогранный угол называется *выпуклым*, если он находится по одну сторону от плоскости каждой его грани. В противном случае многогранный угол называется *невыпуклым*.

Если многоугольник  $ABC \dots N$  выпуклый (см. рис. 100), то и многогранный угол  $SABC \dots N$  выпуклый. На рис. 101 изображен невыпуклый пятигранный угол.

**2\*. Свойства плоских углов многогранного угла.** Сначала рассмотрим свойства плоских углов трехгранного угла.

**Теорема 1.** *У любого трехгранного угла величина каждого плоского угла меньше суммы величин двух других плоских углов.*

□ Рассмотрим трехгранный угол  $S$ . Величины его плоских углов обозначим  $\alpha, \beta, \gamma$ . Пусть  $\gamma$  — большая из них. Достаточно доказать, что

$$\gamma < \alpha + \beta.$$

На сторонах угла, величина которого равна  $\gamma$ , возьмем две точки  $A, B$  (рис. 102). Затем в треугольнике  $ASB$  на стороне  $AB$  выберем точку  $M$  так, чтобы угол  $ASM$  был равен  $\beta$ . Величину угла  $MSB$  обозначим через  $\varphi$ .

На третьем ребре данного трехгранного угла выберем точку  $C$  так, чтобы  $SC = SM$ . Тогда треугольники  $ASM$  и  $ASC$  равны по двум сторонам и углу между ними, и поэтому  $AM = AC$ .

У треугольников  $BSM$  и  $BSC$  одна сторона  $SB$  общая, стороны  $SM$  и  $SB$  равны, а сторона  $BC$  больше стороны  $BM$ , так как

$$BC > AB - AC = MB.$$

Следовательно, угол  $BSC$  больше угла  $BSM$ , т. е.  $\alpha > \varphi$ . А так как  $\gamma = \varphi + \beta$ , то  $\gamma < \alpha + \beta$ . ■

Из доказанной теоремы следует, что у любого трехгранного угла величина каждого плоского угла больше разности величин двух других плоских углов.

**Теорема 2.** *Сумма величин всех плоских углов трехгранного угла меньше  $360^\circ$ .*

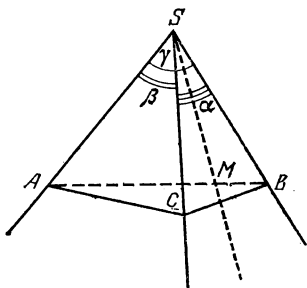


Рис. 102



□ Пусть дан трехгранный угол  $SABC$  (рис. 103). Проведем через точки  $A, B, C$  плоскость и рассмотрим трехгранные углы  $ASBC, BSAC$  и  $CSAB$  с вершинами в точках  $A, B, C$ . Обозначим плоские углы трехгранного угла  $S$  через  $\alpha, \beta, \gamma$ , угла  $A$  —  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ , при вершине  $B$  —  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ , при вершине  $C$  —  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ . Причем будем

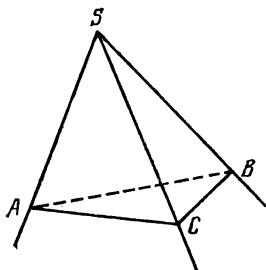


Рис. 103

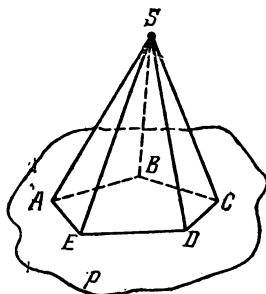


Рис. 104

считать, что  $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$  — это углы треугольника  $ABC$ , а  $\alpha_1, \alpha, \beta_1$  — углы  $\triangle ASB$ ,  $\beta_2, \beta, \gamma_2$  — углы  $\triangle BSC$  и  $\gamma_1, \gamma, \alpha_2$  — углы  $\triangle CSA$ .

К трехгранным углам с вершинами  $A, B$  и  $C$  применим теорему 1:

$$\alpha_1 + \alpha_2 > \alpha_3, \quad \beta_1 + \beta_2 > \beta_3, \quad \gamma_1 + \gamma_2 > \gamma_3.$$

Сложив почленно эти неравенства и заметив, что  $\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 = \pi$ , получим

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 + \gamma_1 + \gamma_2 > \pi.$$

Из треугольников  $ASB, BSC, CSA$  имеем

$$\alpha_1 + \beta_1 = \pi - \alpha, \quad \beta_2 + \gamma_2 = \pi - \beta, \quad \gamma_1 + \alpha_2 = \pi - \gamma.$$

Следовательно,

$$\pi - \alpha + \pi - \beta + \pi - \gamma > \pi,$$

и поэтому  $\alpha + \beta + \gamma < 2\pi$ . ■

Разбивая выпуклый многогранный угол на трехгранные углы, можно доказать следующее утверждение.

*Сумма величин всех плоских углов выпуклого многогранного угла меньше  $360^\circ$ , а каждый плоский угол меньше суммы остальных плоских углов.*

**3. Пирамиды.** Рассмотрим на плоскости  $p$  некоторый многоугольник  $ABC \dots N$  и некоторую точку  $S$ , не лежащую в плоскости  $p$ . Объединение всех отрезков вида  $SM$ ,

у которых точка  $M$  принадлежит данному многоугольнику, называется *пирамидой с вершиной  $S$  и основанием  $ABC \dots N$* . На рис. 104 изображена пирамида  $SABCDE$  с вершиной  $S$  и основанием  $ABCDE$ .

Объединение всех отрезков  $SM$ , у которых точка  $M$  принадлежит границе основания, называется *боковой поверхностью пирамиды*. Боковая поверхность пирамиды состоит из треугольников; они называются *боковыми гранями* пирамиды. Стороны боковых граней, не лежащие в плоскости основания, называются *боковыми ребрами*

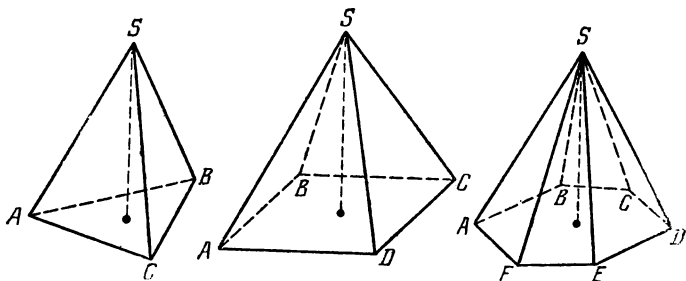


Рис. 105

*пирамиды*. Боковые грани пирамиды и ее основание образуют полную поверхность пирамиды. Изображенная на рис. 104 пирамида имеет пять боковых граней  $SAB, SBC, SCD, SDE, SEA$  и пять боковых ребер  $SA, SB, SC, SD, SE$ .

Пирамиды называются *треугольными, четырехугольными* и т. д. в зависимости от числа сторон основания. Вообще, пирамида называется  *$n$ -угольной*, если ее основанием является  $n$ -угольник. Рассмотренная выше пирамида  $SABCDE$  (см. рис. 104) является пятиугольной. На рис. 105 даны изображения треугольной, четырехугольной и шестиугольной пирамид.

Любую треугольную пирамиду называют еще *тетраэдром*, что означает четырехгранник. Полная поверхность тетраэдра состоит из четырех треугольников, каждый из которых можно считать основанием, а другие — боковыми гранями. Поэтому говорят, что тетраэдр имеет четыре грани, четыре вершины и шесть ребер. Например, тетраэдр  $SABC$  (см. рис. 105) имеет четыре грани  $SAB, SBC, SCA, ABC$ , четыре вершины  $S, A, B, C$  и шесть ребер

$SA, SB, SC, AB, BC, CA$ . Тетраэдр называется *правильным*, если все его грани правильные треугольники.

Плоскость, проходящая через вершину пирамиды и диагональ основания, пересекается с пирамидой по некоторому треугольнику, который называется *диагональным сечением* пирамиды. На рис. 106 одно из диагональных сечений шестиугольной пирамиды заштриховано.

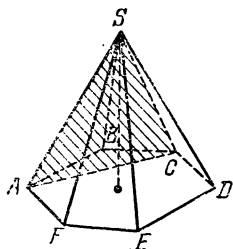


Рис. 106

Сумма площадей всех боковых граней пирамиды называется *площадью боковой поверхности* пирамиды и обозначается  $S_{\text{бок}}$ . *Площадь полной поверхности* пирамиды вычисляется по формуле

$$S = S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}},$$

где  $S_{\text{осн}}$  — площадь основания.

Пирамида называется *правильной*, если ее основанием является правильный многоугольник и все ее боковые ребра равны. Все боковые грани правильной пирамиды равны и являются равнобедренными треугольниками.

Высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из ее вершины, называется *апофемой* пирамиды. Все апофемы правильной пирамиды равны.

Если обозначить сторону основания правильной пирамиды через  $a$ , а апофему через  $h$ , то площадь одной боковой грани этой пирамиды равна  $\frac{1}{2}ah$ . Поэтому площадь боковой поверхности правильной  $n$ -угольной пирамиды вычисляется по формуле:

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2}ahn = \frac{1}{2}Ph,$$

где  $P$  — периметр основания. Следовательно, *площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра основания на апофему*.

**Задача.** Найти площадь полной поверхности правильного тетраэдра, у которого длина ребра равна  $a$ .

△ Каждая грань правильного тетраэдра с ребром  $a$  — это правильный треугольник со стороной  $a$ . Площадь такого треугольника равна  $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ . Тетраэдр имеет четыре грани. Следовательно, площадь полной поверхности правильного тетраэдра с ребром  $a$  равна  $\sqrt{3}a^2$ . ▲

## Вопросы для контроля

1. Что называется трехгранным углом?
2. Что называется вершиной, ребрами и гранями трехгранного угла?
3. Что называется многогранным углом?
4. Что называется вершиной, ребрами и гранями многогранного угла? Сколько ребер и граней у  $n$ -гранного угла?
5. Как обозначается многогранный угол?
6. Какой многогранный угол называется выпуклым?
- 7\*. Как связаны величины плоских углов произвольного трехгранного угла?
- 8\*. Как связаны величины плоских углов произвольного многогранного угла?
9. Что называется пирамидой?
10. Что называется вершиной и основанием пирамиды?
11. Что называется боковой поверхностью пирамиды?
12. Что называется боковыми гранями пирамиды?
13. Что называется боковыми ребрами пирамиды?
14. Что называется полной поверхностью пирамиды?
15. Какая пирамида называется треугольной, четырехугольной и  $n$ -угольной?
16. Что называется тетраэдром?
17. Сколько граней, вершин и ребер имеет тетраэдр?
18. Какой тетраэдр называется правильным?
19. Что называется диагональным сечением пирамиды?
20. Что называется площадью боковой поверхности пирамиды?
21. Как вычисляется площадь полной поверхности пирамиды?
22. Какая пирамида называется правильной?
23. Всякая ли правильная треугольная пирамида будет правильным тетраэдром?
24. Что называется апофемой правильной пирамиды?
25. Чему равна площадь боковой поверхности правильной пирамиды?

## Упражнения

4.8. Существует ли трехгранный угол, плоские углы которого равны:

- 1)  $120^\circ$ ,  $97^\circ$ ,  $33^\circ$ ;      2)  $120^\circ$ ,  $120^\circ$ ,  $130^\circ$ ;
- 3)  $108^\circ$ ,  $92^\circ$ ,  $160^\circ$ ;    4)  $157^\circ$ ,  $82^\circ$ ,  $64^\circ$ ?

4.9. Найдите боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды, у которой сторона основания равна 14 см, а площадь диагонального сечения  $14 \text{ см}^2$ .

4.10. Найдите площадь полной поверхности правильной треугольной, четырехугольной и шестиугольной пирамиды, у которой сторона основания равна  $a$ , а боковое ребро равно  $b$ .

## § 14. Параллельность прямых в пространстве

**1. Параллельные и скрещивающиеся прямые в пространстве.** В пространстве две прямые могут лежать и могут не лежать в одной плоскости. Рассмотрим соответствующие примеры.

Пусть точки  $A, B, C$  не лежат на одной прямой. Проведем через них плоскость  $p$  и выберем некоторую точку  $S$ , не принадлежащую плоскости  $p$  (рис. 107).

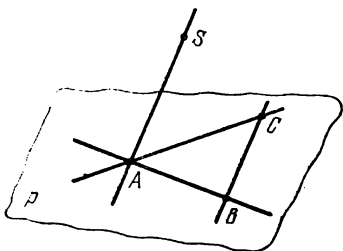


Рис. 107

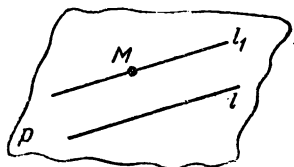


Рис. 108

Тогда прямые  $AB$  и  $BC$  лежат в одной плоскости, именно в плоскости  $p$ , прямые  $AS$  и  $CB$  не лежат в одной плоскости. Действительно, если бы они лежали в одной плоскости, то и точки  $A, B, C, S$  лежали бы в этой плоскости, что невозможно, так как  $S$  не лежит в плоскости, проходящей через точки  $A, B, C$ .

Две прямые в пространстве называются *параллельными*, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются. В частности, если прямые совпадают, то они параллельны.

Если прямые  $l_1$  и  $l_2$  параллельные, то пишут  $l_1 \parallel l_2$ .

Две прямые, не лежащие в одной плоскости, называются *скрещивающимися*. Очевидно, скрещивающиеся прямые не пересекаются и не являются параллельными.

На рис. 107 прямые  $AS$  и  $CB$  скрещивающиеся.

**Теорема.** *Через любую точку пространства, не лежащую на данной прямой, проходит единственная прямая, параллельная данной.*

□ Пусть  $l$ —данная прямая, и  $M$ —некоторая точка пространства, не лежащая на этой прямой. По теореме 1 § 12 через прямую  $l$  и точку  $M$  проходит единственная плоскость  $p$  (рис. 108). Из планиметрии известно, что в плоскости  $p$  через точку  $M$  проходит единственная прямая  $l_1$ , параллельная прямой  $l$ .

В пространстве нет другой прямой, проходящей через  $M$  и параллельной прямой  $l$ , так как любая такая прямая

должна лежать в одной плоскости с прямой  $l$  и точкой  $M$ , т. е. в плоскости  $p$ , а в плоскости  $p$  такая прямая единственная. ■

Таким образом, возможны три случая взаимного расположения двух прямых в пространстве:

- 1) прямые *пересекаются*, т. е. имеют одну общую точку;
- 2) прямые *параллельны*, т. е. лежат в одной плоскости и не пересекаются;
- 3) прямые *скрещиваются*, т. е. не лежат в одной плоскости.

**2. Параллельность трех прямых.** На плоскости было доказано, что если две прямые параллельны третьей, то они параллельны. Это свойство называется *транзитивностью* параллельности. Оно справедливо и в пространстве. Для его доказательства сначала докажем следующую лемму.

*Лемма. Если одна из двух параллельных прямых пересекает данную плоскость, то и другая прямая пересекает эту плоскость.*

□ Пусть прямая  $l_1$  пересекает плоскость  $p$  в точке  $M_1$ . Докажем, что любая прямая  $l_2 \parallel l_1$  также пересекает плоскость  $p$ .

Плоскость  $p$  и плоскость  $\alpha$ , в которой лежат параллельные прямые  $l_1$  и  $l_2$ , пересекаются по некоторой прямой  $l$  (рис. 109). Так как прямая  $l$  лежит в плоскости  $\alpha$  и пересекает прямую  $l_1$ , то она пересекает и прямую  $l_2$  в некоторой точке  $M_2$ . Следовательно, прямая  $l_2$  и плоскость  $p$  имеют общую точку  $M_2$ . Других общих точек нет, так как если бы была еще одна общая точка, то прямая  $l_2$  лежала бы в плоскости  $p$  и, следовательно, совпадала с прямой  $l$ , что невозможно. ■

*Теорема. Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны.*

□ Пусть заданы три прямые  $l_1, l_2, l_3$ . Докажем, что если  $l_1 \parallel l_3$  и  $l_2 \parallel l_3$ , то  $l_1 \parallel l_2$ .

Прямые  $l_1$  и  $l_2$  не пересекаются, так как если бы они пересекались, то через точку их пересечения проходили бы две прямые  $l_1$  и  $l_2$ , параллельные прямой  $l_3$ , что не-

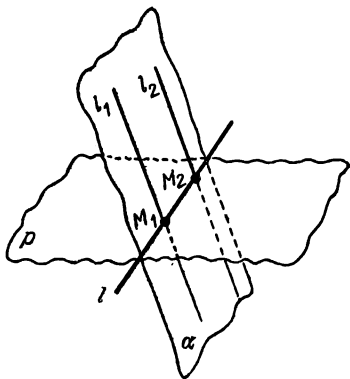


Рис. 109

возможно (см. теорему из п. 1). Докажем, что прямые  $l_1$  и  $l_2$  лежат в одной плоскости.

Через прямую  $l_1$  и некоторую точку  $M \in l_2$  проведем плоскость  $p$  (рис. 110). Если допустить, что прямая  $l_2$  пересекает плоскость  $p$ , то по доказанной лемме прямая  $l_2 \parallel l_1$  пересекает  $p$  и, аналогично, прямая  $l_1 \parallel l_3$  пересекает  $p$ ,

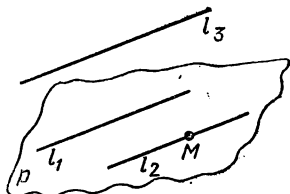


Рис. 110

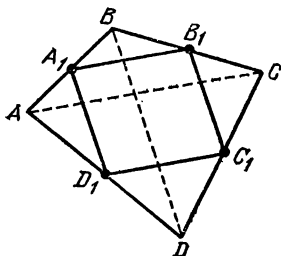


Рис. 111

что невозможно, так как  $l_1$  лежит в  $p$ . Следовательно, прямая  $l_2$  лежит в плоскости  $p$ . ■

**Задача.** Доказать, что середины сторон любого пространственного четырехугольника являются вершинами параллелограмма.

△ Пусть  $ABCD$  — данный четырехугольник. Он пространственный, т. е. его вершины могут не лежать в одной плоскости. Пусть  $A_1, B_1, C_1, D_1$  — середины его сторон  $AB, BC, CD$  и  $DA$  соответственно (рис. 111). Тогда  $A_1B_1$  — средняя линия треугольника  $ABC$ , а  $C_1D_1$  — средняя линия треугольника  $ACD$ , причем  $A_1B_1 \parallel AC$ ,  $A_1B_1 = \frac{1}{2} AC$  и  $C_1D_1 \parallel AC$ ,  $C_1D_1 = \frac{1}{2} AC$ . Следовательно,  $A_1B_1 \parallel C_1D_1$  и  $A_1B_1 = C_1D_1$ , поэтому  $A_1B_1C_1D_1$  — параллелограмм. ▲

При решении задачи использовалось понятие параллельности отрезков. Два отрезка (или луча) называются *параллельными*, если они принадлежат параллельным прямым. Отрезок называется *параллельным данной прямой*, если прямая, которой принадлежит отрезок, параллельна данной.

**3. Углы с сонаправленными сторонами.** В пространстве сонаправленные лучи определяются так же, как и на плоскости. Два луча  $O_1A_1$  и  $O_2A_2$ , не принадлежащие одной прямой, называются *сонаправленными*, если они

параллельны и принадлежат одной полуплоскости с границей  $O_1O_2$ . Два луча, принадлежащие одной прямой, называются *сонаправленными*, если один из них целиком принадлежит другому.

На рис. 112 лучи  $O_1A_1$  и  $O_2A_2$  сонаправлены, лучи  $AB$  и  $OB$  тоже сонаправлены, а лучи  $OA$  и  $OB$  не являются сонаправленными (они имеют противоположные направления).

**Теорема.** Углы с соответственно сонаправленными сторонами равны.

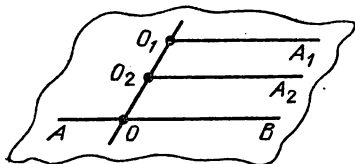


Рис. 112

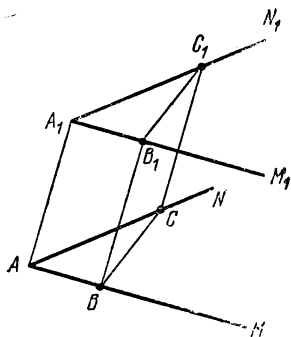


Рис. 113

□ Пусть углы  $MAN$  и  $M_1A_1N_1$  имеют сонаправленные стороны: луч  $AM$  сонаправлен лучу  $A_1M_1$ , а луч  $AN$  сонаправлен лучу  $A_1N_1$  (рис. 113). На лучах  $AM$  и  $A_1M_1$  отложим равные отрезки  $AB$  и  $A_1B_1$ . Тогда отрезки  $BB_1$  и  $AA_1$  параллельны и равны как противоположные стороны параллелограмма.

Аналогично, на лучах  $AN$  и  $A_1N_1$  отложим равные отрезки  $AC$  и  $A_1C_1$ . Тогда отрезки  $CC_1$  и  $AA_1$  параллельны и равны.

Таким образом, отрезки  $BB_1$  и  $CC_1$  равны и, в силу теоремы из п. 2, параллельны, поэтому  $BB_1C_1C$  — параллелограмм и  $BC = B_1C_1$ . Следовательно, треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  равны (по трем сторонам) и угол  $BAC$  равен углу  $B_1A_1C_1$ . ■

**4. Угол между прямыми в пространстве.** Угол между двумя прямыми, лежащими в одной плоскости, определяется в планиметрии. Углом между двумя пересекающимися прямыми называется величина наименьшего из смежных углов, образованных этими прямыми. Угол между параллельными прямыми считается равным нулю.

Определим угол между двумя прямыми, не лежащими в одной плоскости, т. е. между скрещивающимися прямыми.

Пусть в пространстве заданы скрещивающиеся прямые  $l$  и  $m$ . Через некоторую точку  $A$  пространства проведем



прямые  $l_1 \parallel l$  и  $m_1 \parallel m$  (рис. 114). Угол между прямыми  $l_1$  и  $m_1$  не зависит от выбора точки  $A$ , так как получаются углы с сонаправленными сторонами. Этот угол и называется углом между прямыми  $l$  и  $m$ .

Углом между двумя скрещивающимися прямыми называется угол между пересекающимися прямыми, которые параллельны данным скрещивающимся прямым.

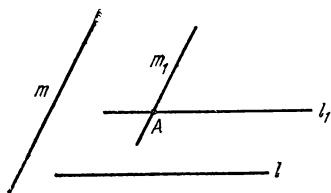


Рис. 114

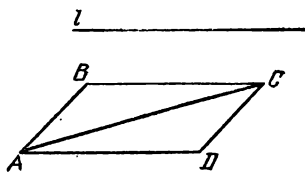


Рис. 115

Угол между прямыми  $l$  и  $m$  обозначается  $\angle(l; m)$ . Из определения следует, что если он измеряется в градусах, то  $0^\circ \leq \angle(l; m) \leq 90^\circ$ , а если в радианах, то  $0 \leq \angle(l; m) \leq \frac{\pi}{2}$ .

**Задача.** Прямая  $l$  и квадрат  $ABCD$  не лежит в одной плоскости. Найти угол между прямыми  $l$  и  $AC$ , если  $l \parallel BC$ .

$\Delta$  Прямые  $l$  и  $AC$  скрещивающиеся (рис. 115). Так как прямая  $l$  параллельна  $BC$ , то угол между прямыми  $l$  и  $AC$ , согласно определению, равен углу  $ACB$ . Следовательно, угол между прямыми  $l$  и  $AC$  равен  $45^\circ$ .  $\blacktriangle$

#### Вопросы для контроля

1. Какие прямые называются параллельными?
2. Какие прямые называются скрещивающимися?
3. Всегда ли можно построить прямую, проходящую через данную точку параллельно данной прямой?
4. Если одна из двух параллельных прямых пересекает плоскость, то всегда ли другая прямая пересекает эту плоскость?
5. Какое свойство параллельности называется транзитивностью параллельности?
6. В каком случае два отрезка (или два луча) называются параллельными?
7. Какие лучи называются сонаправленными?
8. Всегда ли равны углы с сонаправленными сторонами?
9. Как определяется угол между двумя прямыми в пространстве?

10. Можно ли утверждать, что если прямые  $l_1, l_3$  скрещиваются и прямые  $l_2, l_3$  скрещиваются, то прямые  $l_1, l_2$  тоже скрещиваются?

### Упражнения

4.11. Докажите, что все прямые, пересекающие две данные параллельные прямые, лежат в одной плоскости.

4.12. Докажите, если прямые  $AB$  и  $CD$  скрещиваются, то прямые  $AD$  и  $BC$  тоже скрещиваются.

4.13. Через концы отрезка  $AB$  и его середину  $M$  проведены параллельные прямые, пересекающие данную плоскость в точках  $A_1, B_1$  и  $M_1$ . Найдите длину отрезка  $MM_1$ , если  $AA_1 = a, BB_1 = b$  и если отрезок  $AB$  не пересекает данную плоскость.

4.14. Прямая  $l$  пересекает прямую  $a$  и не пересекает прямую  $b$ , которая параллельна прямой  $a$ . Докажите, что прямые  $l$  и  $b$  скрещиваются.

4.15. Даны параллелограмм  $ABCD$  и не пересекающая его плоскость. Через вершины параллелограмма проведены параллельные прямые, пересекающие данную плоскость в точках  $A_1, B_1, C_1, D_1$ . Найдите длину отрезка  $DD_1$ , если  $AA_1 = a, BB_1 = b, CC_1 = c$ .

4.16. Прямая  $l$  параллельна стороне  $BC$  параллелограмма  $ABCD$ . Найдите угол между прямыми  $l$  и  $CD$ , если один из углов параллелограмма равен: а)  $55^\circ$ ; б)  $129^\circ$ ; в)  $\frac{\pi}{3}$  радиан.

4.17. В пространственном четырехугольнике  $ABCD$  стороны  $AB$  и  $CD$  равны. Докажите, что прямые  $AB$  и  $CD$  образуют равные углы с прямой, проходящей через середины отрезков  $BC$  и  $AD$ .

## § 15. Параллельность прямых и плоскостей в пространстве. Призма. Параллелепипед

1. **Параллельность прямой и плоскости.** Прямая и плоскость называются *параллельными*, если они не пересекаются.

Если прямая  $l$  и плоскость  $p$  параллельны, то будем писать  $l \parallel p$ . Заметим, что если прямая  $l$  лежит в плоскости  $p$ , то  $l \parallel p$ .

Докажем следующий признак параллельности прямой и плоскости.

**Теорема.** Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна некоторой прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна самой плоскости.

□ Пусть прямая  $l$ , не лежащая в плоскости  $p$ , параллельна прямой  $l_1$ , которая лежит в плоскости  $p$  (рис. 116). Докажем, что  $l \parallel p$ .

Если прямая  $l$  пересекает плоскость  $p$ , то и параллельная ей прямая  $l_1$  пересекает плоскость  $p$  (см. лемму

из п. 2 § 14). Последнее невозможно, так как  $l_1$  лежит в плоскости  $p$ . Следовательно, прямая  $l$  не пересекает плоскость  $p$ , т. е.  $l \parallel p$ . ■

**Задача.** Доказать, что через каждую из двух скрещивающихся прямых можно провести плоскость, параллельную другой плоскости.

△ Пусть  $l_1$  и  $l_2$  — две скрещивающиеся прямые. Через некоторую точку  $M$  на прямой  $l_1$  проведем прямую  $l$ , параллельную прямой  $l_2$  (см. теорему из п. 1 § 14).

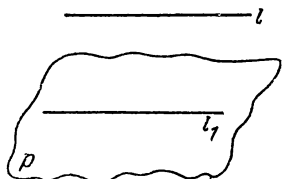


Рис. 116

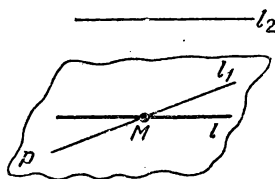


Рис. 117

Тогда плоскость  $p$ , проходящая через прямые  $l_1$  и  $l$ , согласно теореме 1 будет параллельна прямой  $l_2$  (рис. 117). ▲

**2. Параллельность плоскостей.** Две плоскости называются *параллельными*, если они не пересекаются. В частности, если плоскости совпадают, то они параллельны.

Если плоскости  $p$  и  $q$  параллельны, то будем писать  $p \parallel q$ .

Докажем признак параллельности двух плоскостей.

**Теорема.** Если две пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны соответственно двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

□ Пусть пересекающиеся в точке  $M$  прямые  $a_1, a_2$  плоскости  $p$  соответственно параллельны пересекающимся прямым  $b_1, b_2$  плоскости  $q$ :  $a_1 \parallel b_1$  и  $a_2 \parallel b_2$  (рис. 118). Докажем, что  $p \parallel q$ .

Предположим, что плоскости  $p$  и  $q$  пересекаются по некоторой прямой  $l$  (рис. 119). Из признака параллельности прямой и плоскости следует, что прямые  $a_1, a_2$  не пересекают плоскость  $q$  и, следовательно, не пересекают прямую  $l$ . Тогда в плоскости  $p$  через точку  $M$  проходят две прямые  $a_1$  и  $a_2$ , которые параллельны прямой  $l$ , что невозможно. Следовательно, наше предположение неверно, и поэтому  $p \parallel q$ . ■

**Задача.** Построить плоскость, проходящую через заданную точку  $M$  параллельно данной плоскости  $p$ .

△ В плоскости  $p$  возьмем две пересекающиеся прямые  $a_1$  и  $a_2$  (рис. 120). Затем через точку  $M$  и прямую  $a_1$  проводим плоскость  $p_1$ , а через точку  $M$  и прямую  $a_2$  — плоскость  $p_2$ . В плоскости  $p_1$  через точку  $M$  проведем

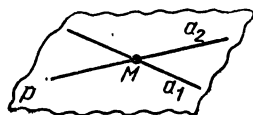
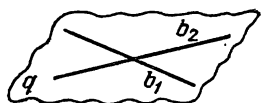


Рис. 118

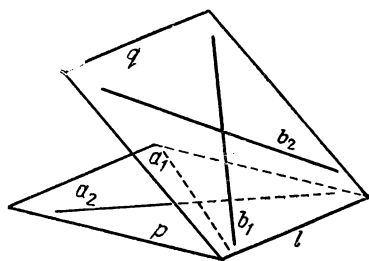


Рис. 119

прямую  $b_1$  параллельно прямой  $a_1$ . Аналогично, в плоскости  $p_2$  через  $M$  проведем прямую  $b_2 \parallel a_2$ . Плоскость  $q$ , проходящая через пересекающиеся прямые  $b_1$ ,  $b_2$ , будет искомой. ▲

Рассмотрим некоторые свойства параллельных плоскостей.

1. Если две параллельные плоскости пересечены третьей плоскостью, то прямые пересечения параллельны.

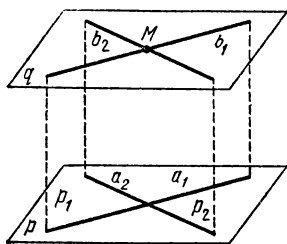


Рис. 120

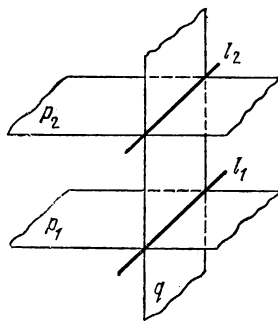


Рис. 121

□ Пусть параллельные плоскости  $p_1$  и  $p_2$  пересечены плоскостью  $q$ , и пусть  $l_1$  и  $l_2$  — прямые пересечения плоскости  $q$  с плоскостями  $p_1$  и  $p_2$  (рис. 121). Прямые  $l_1$  и  $l_2$  не могут пересекаться, так как если бы они пересекались, то пересекались бы и плоскости  $p_1$ ,  $p_2$ .



ником. Оно называется *сечением пирамиды, параллельным основанию*. Пирамида, основанием которой является это сечение, а вершиной — вершина данной пирамиды, называется *отсекаемой пирамидой*.

**Теорема.** Если пирамиду пересечь плоскостью, параллельной основанию, то

1) боковые ребра разделятся на пропорциональные части;

2) в сечении получится многоугольник, подобный основанию;

3) площади оснований данной пирамиды и отсекаемой относятся как квадраты соответственных ребер.

□ Докажем теорему для треугольной пирамиды (рис. 123).

1) Так как параллельные плоскости пересекаются третьей плоскостью по параллельным прямым (свойство 1 из п. 2), то

$$AB \parallel A_1B_1, \quad BC \parallel B_1C_1, \quad AC \parallel A_1C_1.$$

Параллельные прямые рассекают стороны угла на пропорциональные части, поэтому

$$\frac{SA_1}{A_1A} = \frac{SB_1}{B_1B} = \frac{SC_1}{C_1C}. \quad (1)$$

2) Из равенств (1) находим

$$\frac{SA_1}{SA} = \frac{SB_1}{SB} = \frac{SC_1}{SC}.$$

Отсюда следует подобие треугольников:

$$\triangle A_1SB_1 \sim \triangle ASB, \quad \triangle B_1SC_1 \sim \triangle BSC, \quad \triangle C_1SA_1 \sim \triangle CSA.$$

Из подобия этих треугольников получаем

$$\frac{SA_1}{SA} = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1A_1}{CA},$$

т. е. стороны треугольника  $A_1B_1C_1$  пропорциональны сторонам треугольника  $ABC$ . Следовательно, эти треугольники подобны.

3) Площади подобных треугольников относятся как квадраты соответственных сторон:

$$\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}} = \frac{A_1B_1^2}{AB^2} = \frac{SA_1^2}{SA^2}.$$

Для треугольной пирамиды теорема доказана. Для произвольной пирамиды теорема доказывается аналогично. ■

**Задача.** Через середину одного из ребер пирамиды проведена плоскость параллельно основанию. Чему равна площадь  $S$  сечения, если площадь основания равна  $Q$ ?

△ Из доказанной теоремы следует, что секущая плоскость делит пополам все ребра пирамиды. Поэтому, если  $S$ —вершина пирамиды,  $A$  и  $B$ —две соседние вершины основания, а  $A_1$  и  $B_1$ —соответствующие вершины сечения, то  $A_1B_1 = \frac{1}{2} AB$  как средняя линия треугольника  $SAB$ .

Следовательно,  $S = \frac{1}{4} Q$ . ▲

Рассмотрим произвольную пирамиду. Через точку какого-нибудь бокового ребра, не совпадающую с его концами, проведем плоскость, параллельную плоскости основания. Часть пирамиды, заключенная между этой секущей плоскостью и основанием пирамиды, называется *усеченной пирамидой*.

Усеченные пирамиды называются *треугольными*, *четыреугольными*, *n-угольными* в зависимости от числа сторон основания.

На рис. 124 дано изображение четырехугольной усеченной пирамиды.

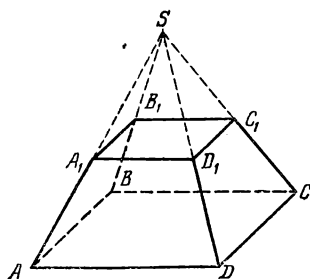


Рис. 124

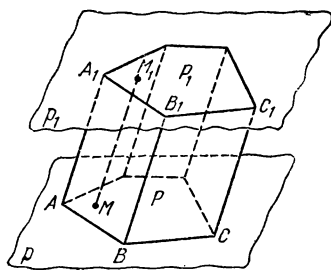


Рис. 125

Усеченная пирамида имеет два основания: *верхнее* и *нижнее*. Основания усеченной пирамиды—два многоугольника, стороны которых попарно параллельны. *Боковые грани* усеченной пирамиды—трапеции.

*Правильной усеченной пирамидой* называется часть правильной пирамиды, заключенная между основанием и плоскостью сечения, параллельной основанию. Высота боковой грани правильной усеченной пирамиды (трапеции) называется *апофемой*.

**4. Призма.** Рассмотрим некоторый плоский многоугольник  $P$  с вершинами  $A, B, C$  и т. д. и некоторую

точку  $A_1$  вне плоскости  $p$  этого многоугольника. Через точку  $A_1$  проведем плоскость  $p_1$ , параллельную плоскости  $p$ .

Объединение всех отрезков  $MM_1$  таких, что  $M \in P$ ,  $M_1 \in p_1$  и  $MM_1 = AA_1$ , называется *призмой с основанием  $P$  и боковым ребром  $AA_1$*  (рис. 125). Многоугольник  $P_1$  с вершинами  $A_1, B_1, C_1$  и т. д., лежащий в плоскости  $p_1$ , тоже называется *основанием* этой призмы, так что призма имеет два основания (*верхнее и нижнее*). Вершины оснований призмы называются *вершинами призмы*, стороны оснований — *ребрами основания*.

Объединение всех отрезков  $MM_1$  таких, что  $M$  принадлежит границе многоугольника  $P$ , называется *боковой поверхностью призмы*.

**Теорема.** *Боковая поверхность призмы состоит из параллелограммов. Основания призмы равны.*

□ Пусть  $A, B, C$  — последовательные вершины основания данной призмы, а  $A_1, B_1, C_1$  — соответствующие вершины другого основания этой призмы.

Параллельные прямые  $AA_1$  и  $BB_1$  лежат в одной плоскости, которая пересекает плоскости оснований по параллельным прямым  $AB$  и  $A_1B_1$ . Отсюда следует, что четырехугольник  $ABB_1A_1$  является параллелограммом. Следовательно, боковая поверхность призмы состоит из параллелограммов.

Так как отрезки  $AB$  и  $A_1B_1$  являются противоположными сторонами параллелограмма  $ABB_1A_1$ , то  $AB = A_1B_1$ . Углы  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  равны как углы с сонаправленными сторонами. Аналогично доказывается, что и все соответствующие стороны и углы оснований равны. Следовательно, основания призмы равны. ■

Параллелограммы, образующие боковую поверхность призмы, называются *боковыми гранями призмы*. Общие стороны боковых граней называются *боковыми ребрами призмы*.

Изображенная на рис. 125 призма имеет пять боковых граней (параллелограммы  $ABB_1A_1, BCC_1B_1, \dots$ ), пять боковых ребер (отрезки  $AA_1, BB_1, CC_1, \dots$ ), десять ребер оснований ( $AB, BC, \dots, A_1B_1, B_1C_1, \dots$ ) и десять вершин ( $A, B, C, \dots, A_1, B_1, C_1, \dots$ ).

Боковые грани призмы и ее основания образуют *полную поверхность призмы*.

Если основаниями призмы являются  $n$ -угольники, то призму называют  *$n$ -угольной*. На рис. 126 изображены треугольная, четырехугольная и пятиугольная призмы.



Отрезок, соединяющий две вершины призмы, не лежащие на одной грани, называется *диагональю* призмы. Ясно, что у треугольной призмы диагоналей нет. Можно доказать, что число диагоналей у  $n$ -угольной призмы

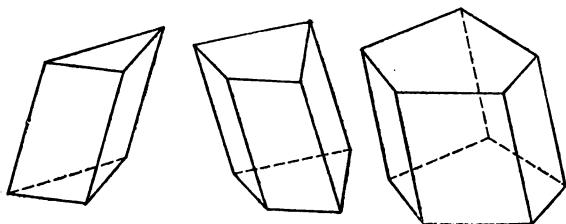


Рис. 126

равно  $n(n-3)$ . Например, четырехугольная призма имеет  $4 \cdot (4-3) = 4$  диагонали (рис. 127), а пятиугольная —  $5 \cdot (5-3) = 10$  диагоналей.

Плоскость, проходящая через два боковых ребра призмы, не лежащих на одной грани, называется *диагональной плоскостью*. Параллелограмм, получающийся при пересечении призмы диагональной плоскостью, называется

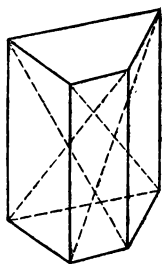


Рис. 127

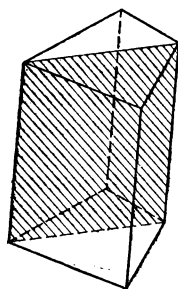


Рис. 128

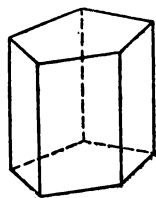


Рис. 129

*диагональным сечением* призмы. На рис. 128 заштриховано одно из двух диагональных сечений четырехугольной призмы.

Призма, у которой все боковые грани являются прямоугольниками, называется *прямой* (рис. 129). В противном случае призма называется *наклонной*. Прямая призма, основанием которой является правильный многоугольник, называется *правильной*.

**5. Параллелепипед и его свойства.** Призма, основанием которой является параллелограмм, называется *параллелепипедом*. Из определения следует, что полная поверхность параллелепипеда состоит из шести параллелограммов (рис. 130). Эти параллелограммы называются *гранями* параллелепипеда. Грани параллелепипеда, не имеющие общих вершин, называются *противолежащими*.

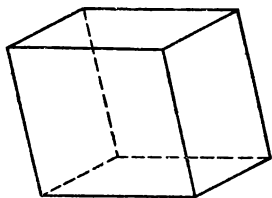


Рис. 130

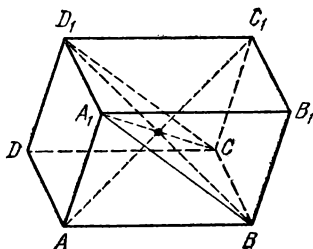


Рис. 131

У параллелепипеда восемь вершин и двенадцать ребер. Параллельные ребра равны, как противолежащие стороны параллелограмма.

**Теорема 1.** *Противолежащие грани параллелепипеда параллельны и равны.*

□ Рассмотрим противолежащие грани параллелепипеда  $ABB_1A_1$  и  $DCC_1D_1$  (рис. 130).

Так как все грани параллелепипеда — параллелограммы, то прямые  $AB$  и  $AA_1$  параллельны соответственно прямым  $DC$  и  $DD_1$ . По признаку параллельности двух плоскостей рассматриваемые грани параллельны.

Эти грани равны, так как равны параллельные стороны и равны соответствующие углы ( $\angle A_1AB = \angle D_1DC$ ) как углы с сонаправленными сторонами. ■

**Теорема 2.** *Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся пополам.*

□ Так как отрезки  $BC$  и  $A_1D_1$  (см. рис. 131) параллельны и равны, то  $BCD_1A_1$  — параллелограмм. Его диагонали  $BD_1$  и  $CA_1$  пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. Аналогично доказывается, что две другие пары диагоналей параллелепипеда ( $BD_1$  и  $AC_1$ ,  $BD_1$  и  $DB_1$ ) пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. Отсюда следует, что все четыре диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке. ■

Параллелепипед, у которого все грани являются прямоугольниками, называется *прямоугольным параллелепи-*

*педом*. Таким образом, прямоугольный параллелепипед — эта прямая призма, основанием которой является прямоугольник. Длины трех непараллельных ребер прямоугольного параллелепипеда называются *его измерениями*.

Прямая призма, основанием которой является параллелограмм, называется *прямым параллелепипедом*.

Прямоугольный параллелепипед, у которого все ребра равны, называется *кубом*. У куба все грани — равные квадраты.

### Вопросы для контроля

1. Когда прямая и плоскость называются параллельными?
2. Сформулируйте признак параллельности прямой и плоскости.
3. Какие две плоскости называются параллельными?
4. Сформулируйте признак параллельности двух плоскостей.
5. Как построить плоскость, проходящую через заданную точку параллельно данной плоскости?
6. Какие свойства параллельных плоскостей вы знаете?
7. Через любую ли точку пространства можно провести плоскость, параллельную данной плоскости? Сколько таких плоскостей можно провести?
8. Известно, что плоскость  $p_1$  параллельна плоскости  $p_2$ , которая параллельна плоскости  $p_3$ . Будут ли параллельными плоскости  $p_1$  и  $p_3$ ?
9. Что называется сечением пирамиды, параллельным основанию?
10. Какие свойства параллельных сечений пирамиды вы знаете?
11. Что называется усеченной пирамидой?
12. Какая усеченная пирамида называется треугольной, четырехугольной,  $n$ -угольной?
13. Сколько оснований имеет усеченная пирамида?
14. Что является боковыми гранями усеченной пирамиды?
15. Какая усеченная пирамида называется правильной?
16. Что называется апофемой правильной усеченной пирамиды?
17. Что называется призмой? ее основанием и боковым ребром?
18. Сколько оснований имеет призма?
19. Сколько ребер имеет  $n$ -угольная призма?
20. Что называется вершиной призмы? Сколько вершин у  $n$ -угольной призмы?
21. Что называется боковыми гранями призмы? боковыми ребрами призмы?
22. Что называется боковой поверхностью призмы? полной поверхностью призмы?
23. Какая призма называется  $n$ -угольной?

24. Что называется диагональю призмы? Есть ли диагональ у треугольной призмы?

25. Какая плоскость называется диагональной плоскостью призмы?

26. Какая призма называется прямой? наклонной? правильной?

27. Какая призма называется параллелепипедом?

28. Что можно сказать о противолежащих гранях параллелепипеда?

29. Каким свойством обладает точка пересечения диагоналей параллелепипеда?

30. Какой параллелепипед называется прямоугольным?

31. Что называется измерениями прямоугольного параллелепипеда?

32. Какой параллелепипед называется кубом?

33. Что называется прямым параллелепипедом?

### Упражнения

4.18. Будут ли параллельными две прямые, которые параллельны одной плоскости? Могут ли такие прямые пересекаться? Могут ли быть эти прямые скрещивающимися?

4.19. Точки  $A$  и  $B$  лежат в плоскости  $p$ , а точка  $M$  не лежит в этой плоскости. Докажите, что прямая, проходящая через середины отрезков  $AM$  и  $BM$ , параллельна плоскости  $p$ .

4.20. У треугольника одна сторона параллельна плоскости, а две другие пересекают эту плоскость. Докажите, что плоскость отсекает от данного треугольника подобный ему треугольник.

4.21. Плоскость, параллельная прямой  $AB$ , пересекает сторону  $AC$  треугольника  $ABC$  в точке  $A_1$ , а сторону  $BC$  — в точке  $B_1$ . Найдите длину отрезка  $A_1B_1$ , если  $AA_1 = a$ ,  $AB = b$ ,  $A_1C = c$ .

4.22. Три отрезка  $A_1B_1$ ,  $A_2B_2$ ,  $A_3B_3$ , не лежащие в одной плоскости, имеют общую середину. Докажите, что плоскости  $A_1A_2A_3$  и  $B_1B_2B_3$  параллельны.

4.23. Через точки  $A$  и  $B$  одной из двух параллельных плоскостей проведены параллельные прямые, пересекающие вторую плоскость в точках  $A_1$  и  $B_1$ . Чему равен отрезок  $A_1B_1$ , если  $AB = a$ ?

4.24. Известно, что прямая  $l$  параллельна прямой  $m$ , которая параллельна плоскости  $p$ . Будет ли прямая  $l$  параллельна плоскости  $p$ ?

4.25. Пусть прямые  $l$  и  $m$  параллельны, и через каждую из них проведено по одной плоскости. Докажите, что если эти плоскости пересекаются, то прямая их пересечения параллельна прямым  $l$  и  $m$ .

4.26. Докажите, что если прямая пересекает одну из параллельных плоскостей, то она пересекает и другую.

4.27. Докажите, что отрезки параллельных прямых, заключенных между параллельными плоскостями, равны.

4.28. Пусть основанием пирамиды  $SABC$  является правильный треугольник со стороной  $a$ , точка  $D$  лежит на ребре  $SA$  и  $SD : DA = 1 : 2$ . Найдите площадь сечения, проходящего через точку  $D$  параллельно основанию.

4.29. Найдите площадь боковой поверхности прямой призмы, у которой основанием является параллелограмм со сторонами  $a$

и  $b$ , а боковое ребро равно  $c$ . Можно ли по этим данным найти площадь полной поверхности?

4.30. Полная поверхность прямоугольного параллелепипеда равна  $352 \text{ см}^2$ . Найдите его измерения, если они относятся как  $1 : 2 : 3$ .

4.31. Ребро куба равно  $a$ . Найдите площадь сечения куба плоскостью, проходящей через концы ребер, выходящих из одной вершины.

4.32. Измерения прямоугольного параллелепипеда равны  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Найдите площадь сечения этого параллелепипеда плоскостью, проходящей через концы ребер, выходящих из одной вершины.

## § 16. Перпендикуляр и наклонная к плоскости

1. **Перпендикулярность прямой и плоскости.** Прямая называется *перпендикулярной плоскости*, если она пересекает плоскость и перпендикулярна любой прямой, лежащей в плоскости и проходящей через точку пересечения данной прямой и плоскости.

Если прямая  $l$  перпендикулярна плоскости  $p$ , то пишут  $l \perp p$ . В этом случае говорят также, что *плоскость  $p$  перпендикулярна прямой  $l$*  или *прямая  $l$  и плоскость  $p$  перпендикулярны*.

На рис. 132 прямая  $l$  перпендикулярна плоскости  $p$ .

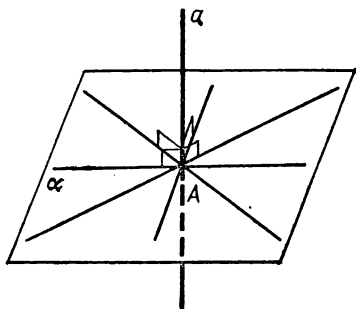


Рис. 132

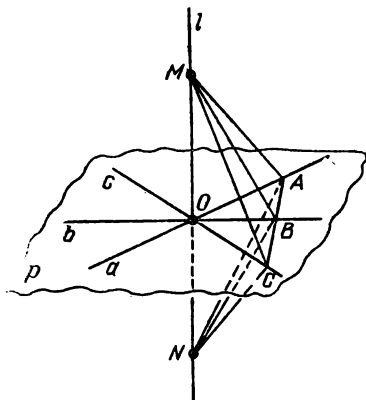


Рис. 133

Рассмотрим признак перпендикулярности прямой и плоскости.

**Теорема 1.** Если прямая, пересекающая плоскость, перпендикулярна двум пересекающимся прямым, принадлежащим плоскости, то она перпендикулярна и плоскости.

□ Пусть прямая  $l$  пересекает плоскость  $p$  в точке  $O$  и перпендикулярна двум пересекающимся прямым  $a$  и  $b$ ,

лежащим в плоскости  $p$ . Очевидно, что прямые  $a$  и  $b$  пересекаются в точке  $O$  (рис. 133).

Докажем, что  $l \perp p$ , т. е. что в плоскости  $p$  прямая  $l$  перпендикулярна любой прямой  $c$ , проходящей через точку  $O$ .

Проведем в плоскости  $p$  произвольную прямую, не проходящую через точку  $O$  и пересекающую прямые  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Обозначим точки пересечения соответственно  $A$ ,  $B$ ,  $C$ .

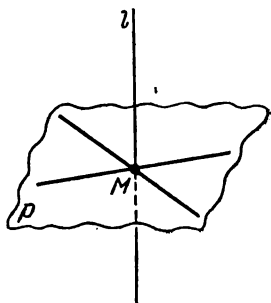


Рис. 134

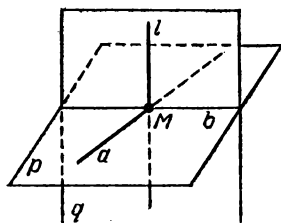


Рис. 135

На прямой  $l$  от точки  $O$  в разные стороны отложим равные отрезки  $OM$  и  $ON$ . Треугольники  $AMN$  и  $BMN$  равнобедренные:  $AM=AN$  и  $BM=BN$ , так как у них высота ( $AO$  и  $BO$  соответственно) является и медианой. Докажем, что треугольник  $CMN$  также равнобедренный:  $CM=CN$ .

Треугольники  $MAB$  и  $NAB$  равны в силу равенства соответствующих сторон. Тогда  $\angle MAB = \angle NAB$ . Следовательно, треугольники  $MAC$  и  $NAC$  также равны, так как  $MA=NA$ ,  $AC$ —общая,  $\angle MAB = \angle NAB$ , и поэтому  $MC=NC$ .

Таким образом,  $\triangle CMN$  равнобедренный:  $CM=CN$ ;  $CO$ —его медиана (по построению), и поэтому  $CO \perp MN$ , т. е.  $l \perp c$ . ■

**Задача 1.** Через данную точку  $M$  прямой  $l$  провести плоскость, перпендикулярную этой прямой.

▲ Проведем через точку  $M$  две прямые, перпендикулярные прямой  $l$  (см. задачу из пункта 3 § 12). Плоскость  $p$ , проходящая через эти прямые (рис. 134), будет перпендикулярна прямой  $l$ . ▲

Можно доказать, что  $p$ —единственная плоскость, которая проходит через точку  $M$  и перпендикулярна прямой  $l$ .

**Задача 2.** Через данную точку  $M$  плоскости  $p$  провести прямую, перпендикулярную этой плоскости.

$\Delta$  В плоскости  $p$  через точку  $M$  проведем некоторую прямую  $a$  и построим плоскость  $q$ , проходящую через точку  $M$  и перпендикулярную прямой  $a$  (см. задачу 1). Через  $b$  обозначим прямую пересечения плоскостей  $p$  и  $q$  (рис. 135). Наконец, в плоскости  $q$  через точку  $M$  проведем прямую  $l$ , перпендикулярную прямой  $b$ . Прямая  $l$  искомая: она проходит через точку  $M$  и перпендикулярна прямой  $b$  (по построению) и прямой  $a$ , так как  $a \perp q$  и, следовательно,  $a \perp l$ .  $\blacktriangle$

Можно доказать, что  $l$ —единственная прямая, которая проходит через точку  $M$  и перпендикулярна плоскости  $p$ .

**Теорема 2.** Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то и другая прямая перпендикулярна этой плоскости.

$\square$  Пусть  $l_1$  и  $l_2$ —две параллельные прямые, причем  $l_1$  перпендикулярна плоскости  $p$  (рис. 136).

Так как  $l_1 \perp p$ , то прямая  $l_1$  пересекает плоскость  $p$  в некоторой точке  $M_1$ . Прямая  $l_2$ , параллельная прямой  $l_1$ , тоже пересекает плоскость  $p$  в некоторой точке  $M_2$  (см. лемму из п. 2 § 14).

Через точку  $M_2$  в плоскости  $p$  проведем произвольную прямую  $a_2$ , а через точку  $M_1$  проведем прямую  $a_1$ , параллельную прямой  $a_2$ .

По условию прямая  $l_1$  пересекается с прямой  $a_1$  под прямым углом. Отсюда, согласно теореме о равенстве углов с сонаправленными сторонами, следует, что прямая  $l_2$  пересекается с прямой  $a_2$  под прямым углом, т. е.  $l_2 \perp a_2$ . Так как  $a_2$ —произвольная прямая в плоскости  $p$ , проходящая через точку  $M_2$ , то  $l_2 \perp p$ .  $\blacksquare$

**Задача 3.** Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  (рис. 137). Доказать, что прямая  $AC$  перпендикулярна плоскости сечения  $BDD_1 B_1$ .

$\Delta$  Так как  $ABCD$ —квадрат, то  $AC \perp BD$ . А так как  $D_1 D \perp AD$  и  $D_1 D \perp DC$ , то прямая  $D_1 D$  перпендикулярна плоскости основания  $ABCD$ . Этой плоскости перпендикулярна и прямая  $BB_1$ , параллельная прямой  $D_1 D$  (см. теорему 2). Следовательно,  $BB_1 \perp AC$ .

По признаку перпендикулярности прямой и плоскости прямая  $AC$  перпендикулярна плоскости сечения  $BDD_1B_1$ . ■

**2. Перпендикуляр и наклонная.** Пусть  $p$  — некоторая плоскость, а  $M$  — точка, не лежащая в плоскости  $p$ . Через точку  $M$  проведем прямую, перпендикулярную плоскости  $p$ , и через  $N$  обозначим точку пересечения этой прямой с плоскостью  $p$  (рис. 138). Тогда отрезок  $MN$  называется *перпендикуляром, опущенным из точки  $M$  на плоскость  $p$* , а точка  $N$  — *основанием перпендикуляра*.

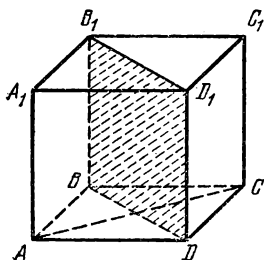


Рис. 137

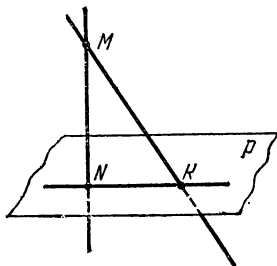


Рис. 138

Любой отрезок  $MK$ , у которого точка  $K$  принадлежит плоскости  $p$  и не совпадает с точкой  $N$ , называется *наклонной, проведенной из точки  $M$  к плоскости  $p$* , а точка  $K$  — *основанием наклонной*. Отрезок  $NK$  называется *проекцией наклонной  $MK$  на плоскость  $p$* .

Так как в прямоугольном треугольнике  $MNK$  катет  $MN$  меньше гипотенузы  $MK$ , то справедливо следующее утверждение: *перпендикуляр, опущенный из точки на плоскость, меньше любой наклонной, проведенной из той же точки к этой плоскости*.

Для перпендикуляра и наклонных, проведенных через одну точку к одной плоскости, справедливы следующие утверждения:

- 1) перпендикуляр меньше любой наклонной;
- 2) наклонные равны тогда и только тогда, когда равны их проекции;
- 3) одна наклонная меньше другой наклонной тогда и только тогда, когда проекция первой наклонной меньше проекции второй наклонной.

□ Действительно, для прямоугольных треугольников  $MNK_1$  и  $MNK_2$  (рис. 139) справедливы равенства

$$MK_1^2 = MN^2 + NK_1^2, \quad MK_2^2 = MN^2 + NK_2^2,$$



из которых и следуют сформулированные свойства перпендикуляра и наклонных. ■

Доказанное свойство перпендикуляра и наклонной (свойство 1) делает естественным следующее определение расстояния от точки до плоскости.

Длина перпендикуляра, опущенного из точки  $M$  на плоскость  $p$ , называется *расстоянием от точки  $M$  до*

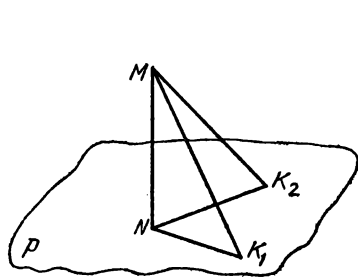


Рис. 139

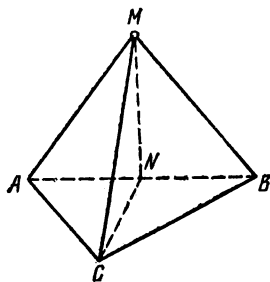


Рис. 140

плоскости  $p$ . Расстояние от точки, лежащей в плоскости  $p$ , до плоскости  $p$  считается равным нулю.

**Задача 1.** Катеты прямоугольного треугольника  $ABC$  ( $\angle ACB = 90^\circ$ ) равны 4 см и 3 см. Точка  $M$  находится на расстоянии  $\sqrt{6}$  см от плоскости треугольника  $ABC$  и на одинаковом расстоянии от всех его вершин. Найти расстояние от точки  $M$  до вершин треугольника.

△ Расстояние от точки  $M$  до плоскости треугольника  $ABC$  есть длина перпендикуляра, опущенного из точки  $M$  на эту плоскость, а расстояния от точки  $M$  до вершин — длины соответствующих наклонных (рис. 140).

Так как наклонные  $MA$ ,  $MB$  и  $MC$  равны, то равны и их проекции  $NA$ ,  $NB$  и  $NC$ , где  $N$  — основание перпендикуляра, опущенного из точки  $M$ . Отсюда следует, что точка  $N$  является серединой гипотенузы треугольника  $ABC$  (это единственная точка в плоскости  $ABC$ , равноудаленная от точек  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ). Следовательно,

$$MA = \sqrt{AN^2 + MN^2},$$

где  $AN = \frac{1}{2} \sqrt{AC^2 + BC^2} = \frac{1}{2} \sqrt{16 + 9} = 2,5$ ;  $MN = \sqrt{6}$ .

Поэтому  $MA = MB = MC = 3,5$  см. ▲

**Задача 2.** Доказать, что если прямая параллельна некоторой плоскости, то все ее точки равноудалены от этой плоскости.

△ Пусть прямая  $a$  параллельна плоскости  $p$  (рис. 141). Из некоторой точки  $M$  прямой  $a$  опустим перпендикуляр  $MN$  на плоскость  $p$ .

Через  $b$  обозначим прямую пересечения плоскости  $p$  с плоскостью  $q$ , проходящей через пересекающиеся прямые  $a$  и  $MN$ . Известно, что  $b \parallel a$ .

Рассмотрим теперь произвольную точку  $M_1$  прямой  $a$ , отличную от точки  $M$ , и проведем прямую  $M_1N_1$ , параллельную прямой  $MN$ . Тогда (см. теорему 2 из п. 1) прямая  $M_1N_1$  будет перпендикулярна плоскости  $p$ , и поэтому длина отрезка  $M_1N_1$ —это расстояние от точки  $M_1$  до

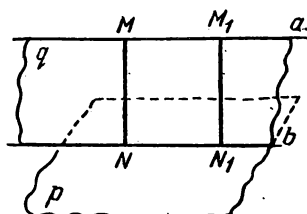


Рис. 141

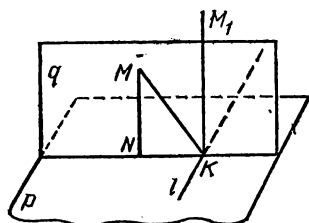


Рис. 142

плоскости  $p$ . Отрезок  $M_1N_1$  равен отрезку  $MN$ , так как  $MM_1N_1N$ —параллелограмм. ▲

Доказанное утверждение (задача 2) делает естественным следующее определение.

В случае, когда прямая параллельна плоскости, расстояние от произвольной точки прямой до плоскости называется *расстоянием между прямой и плоскостью*. Расстояние между пересекающимися прямой и плоскостью равно нулю.

Можно доказать, что если две плоскости параллельны, то все точки одной плоскости равноудалены от другой плоскости. Поэтому *расстоянием между параллельными плоскостями* называется расстояние от произвольной точки одной из них до другой.

*Расстоянием между скрещивающимися прямыми* называется расстояние между параллельными плоскостями, в которых лежат эти прямые.

### 3. Теорема о трех перпендикулярах.

**Теорема.** Прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной, перпендикулярна этой наклонной тогда и только тогда, когда она перпендикулярна проекции наклонной.

□ Пусть  $MN$ —перпендикуляр к плоскости  $p$ ,  $MK$ —наклонная,  $NK$ —проекция этой наклонной (рис. 142).

Через точку  $K$  в плоскости  $q$  треугольника  $MNK$  проведем прямую  $M_1K$ , параллельную прямой  $MN$ . Прямая  $M_1K$  будет перпендикулярна плоскости  $p$ , т. е. перпендикулярна и любой прямой  $l$  в плоскости, проходящей через точку  $K$ :  $l \perp M_1K$ .

Следовательно, если  $l \perp NK$ , то  $l \perp q$ , и поэтому  $l \perp MK$ . И обратно, если  $l \perp MK$ , то  $l \perp q$ , и поэтому  $l \perp NK$ . ■

**Задача.** Через центр вписанной в треугольник окружности проведена прямая, перпендикулярная плоскости треугольника. Доказать, что каждая точка этой прямой равноудалена от сторон данного треугольника.

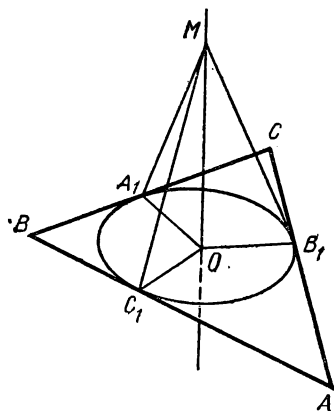


Рис. 143

Пусть  $O$  — центр окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , и  $A_1, B_1, C_1$  — точки касания окружности со сторонами треугольника (рис. 143).

Через точку  $O$  проведем прямую, перпендикулярную плоскости треугольника  $ABC$ , и на ней выберем некоторую точку  $M$ .

Так как радиус  $OA_1$  перпендикулярен стороне  $BC$ , то по теореме о трех перпендикулярах  $MA_1 \perp BC$ . Следовательно, расстояние от точки  $M$  до стороны  $BC$  равно длине отрезка  $MA_1$ . Из прямоугольного треугольника  $MOA_1$  находим

$$MA_1 = \sqrt{MO^2 + OA_1^2} = \sqrt{MO^2 + r^2},$$

где  $r$  — радиус вписанной окружности.

Аналогично доказывается, что длина отрезка  $MB_1$  есть расстояние от точки  $M$  до стороны  $AC$ , длина отрезка  $MC_1$  — расстояние от  $M$  до  $AB$ , причем

$$MB_1 = MC_1 = \sqrt{MO^2 + r^2}.$$

Следовательно, все расстояния от точки  $M$  до сторон треугольника  $ABC$  равны. ▲

**4. Угол между прямой и плоскостью.** Пусть  $MK$  — наклонная, проведенная из точки  $M$  к плоскости  $p$ , а  $NK$  — ее проекция на плоскость  $p$  (рис. 144). Тогда угол  $MKN$  называется *углом между прямой  $MK$  и плоскостью  $p$* . Таким

образом определяется угол между прямой и плоскостью, пересекающей эту прямую и не перпендикулярной ей.

Если прямая перпендикулярна плоскости, то угол между этой прямой и плоскостью считается равным  $90^\circ$ . Если прямая параллельна плоскости, то угол между этой прямой и плоскостью равен нулю.

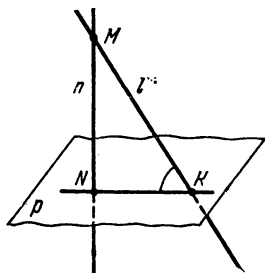


Рис. 144

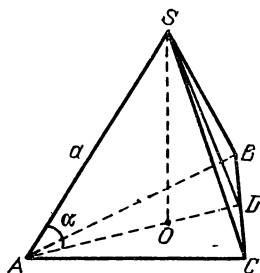


Рис. 145

Угол между прямой  $l$  и плоскостью  $p$  обозначается  $\angle(l; p)$ . Из определения следует, что всегда

$$0^\circ \leq \angle(l; p) \leq 90^\circ,$$

если угол измеряется в градусах, и

$$0 \leq \angle(l; p) \leq \frac{\pi}{2},$$

если угол измеряется в радианах.

Из рис. 144 видно, что

$$\angle(l; p) = \frac{\pi}{2} - \angle(l; n),$$

где  $n$  — прямая, перпендикулярная плоскости  $p$ .

**Задача.** Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно  $a$  и образует с плоскостью основания угол  $\alpha$ . Найти апофему.

$\Delta$  Так как пирамида правильная, то все ее боковые грани — равнобедренные треугольники (рис. 145). Через ребро  $SA$  и середину ребра  $BC$  (точку  $D$ ) проведем плоскость  $SAD$  и в ней опустим перпендикуляр  $SO$  из вершины  $S$  на прямую  $AD$ . Докажем, что прямая  $SO$  перпендикулярна плоскости основания  $ABC$ .

Так как  $CB \perp AD$  и  $CB \perp SD$ , то прямая  $CB$  перпендикулярна плоскости  $SAD$ , и поэтому угол между

прямыми  $CB$  и  $SO$  равен  $\frac{\pi}{2}$ . Отсюда и из того, что  $SO \perp AD$ , следует, что  $SO$  перпендикулярна плоскости  $ABC$ .

Следовательно,  $\angle SAD = \alpha$ ,  $SO = a \sin \alpha$ .

Мы доказали, что точка  $O$  лежит на произвольно выбранной медиане  $AD$  треугольника  $ABC$ . Следовательно,  $O$  — точка пересечения медиан этого треугольника. Поэтому

$$OD = \frac{1}{2} AO = \frac{1}{2} a \cos \alpha.$$

Из прямоугольного треугольника  $SOD$  по теореме Пифагора находим апофему  $SD$ :

$$SD = \sqrt{a^2 \sin^2 \alpha + \frac{1}{4} a^2 \cos^2 \alpha} = \frac{a}{2} \sqrt{1 + 3 \sin^2 \alpha}. \blacktriangle$$

**5. Высота пирамиды, усеченной пирамиды и призмы.** Перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на плоскость основания, называется *высотой пирамиды*, а его основание — *основанием высоты*. Можно доказать, что в правильной пирамиде основание высоты совпадает с центром основания пирамиды.

*Высотой усеченной пирамиды* называется перпендикуляр, опущенный из произвольной точки верхнего основания на плоскость нижнего основания.

Если пирамиду пересечем плоскостью, параллельной основанию, то получим усеченную пирамиду, нижнее основание которой совпадает с основанием данной пирамиды, и меньшую пирамиду, у которой вершина совпадает с вершиной данной пирамиды, а основание — с верхним основанием усеченной пирамиды. Эта пирамида, как известно, называется *отсекаемой*.

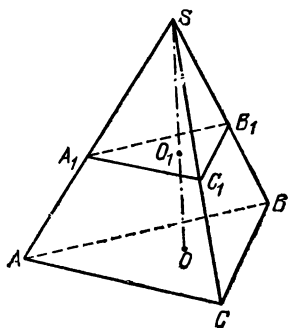


Рис. 146

**Теорема.** Если пирамида пересечена плоскостью, параллельной основанию, то площади оснований данной пирамиды и отсекаемой пирамиды относятся как квадраты их высот.

□ Докажем теорему для треугольной пирамиды. Пусть  $SABC$  — данная пирамида, а  $SA_1B_1C_1$  — пирамида, отсекаемая от данной плоскостью  $A_1B_1C_1$ , параллельной плоскости основания  $ABC$  (рис. 146).

Если точка  $O$  — основание высоты пирамиды  $SABC$ , а  $O_1$  — точка пересечения этой высоты с плоскостью  $A_1B_1C_1$ , то, очевидно,  $SO_1$  — высота пирамиды  $SA_1B_1C_1$ .

Как уже было доказано (см. теорему из п. 3 § 15), площади оснований  $A_1B_1C_1$  и  $ABC$  относятся как квадраты ребер  $SA_1$  и  $SA$ . Если ребро  $SA$  перпендикулярно плоскости основания, то теорема доказана. Пусть ребро  $SA$  не является высотой пирамиды  $SABC$ .

Прямые  $A_1O_1$  и  $AO$  параллельны, как прямые пересечения параллельных плоскостей  $A_1B_1C_1$  и  $ABC$  плоскостью  $SAO$ . Поэтому треугольники  $SA_1O_1$  и  $SAO$  подобны и

$$\frac{SA_1}{SA} = \frac{SO_1}{SO}.$$

Следовательно,

$$\frac{S_{\Delta A_1B_1C_1}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{SO_1^2}{SO^2}. \blacksquare$$

**Задача 1.** В пирамиде площадь основания равна  $Q$ , а площадь сечения, параллельного основанию, равна  $Q_1$ . Найти высоту пирамиды, если высота усеченной пирамиды равна  $h$ .

△ Через  $H$  обозначим высоту данной пирамиды. Тогда, как было доказано выше,

$$\frac{Q_1}{Q} = \frac{(H-h)^2}{H^2}.$$

Решая это уравнение, получаем

$$\frac{\sqrt{Q_1}}{\sqrt{Q}} = \frac{H-h}{H}; \quad \frac{h}{H} = 1 - \frac{\sqrt{Q_1}}{\sqrt{Q}}.$$

Следовательно,

$$H = \frac{h\sqrt{Q}}{\sqrt{Q} - \sqrt{Q_1}}. \blacktriangle$$

Перпендикуляр, опущенный из произвольной точки одного основания призмы на плоскость другого основания, называется *высотой призмы*.

Высота призмы равна расстоянию между плоскостями ее оснований.

Многоугольник, получающийся при пересечении призмы плоскостью, перпендикулярной всем боковым ребрам, называется *перпендикулярным сечением призмы*. На рис. 147 заштрихованный треугольник  $A'B'C'$  — перпендикулярное сечение.

У прямой призмы любое сечение плоскостью, параллельной основаниям, будет перпендикулярным сечением, в частности, оба ее основания — перпендикулярные сечения. Заметим, что не любая наклонная призма имеет перпендикулярное сечение.

**Задача 2.** Доказать, что в прямоугольном параллелепипеде квадрат диагонали равен сумме квадратов трех его измерений.

$\Delta$  В прямоугольном параллелепипеде все диагонали равны. Рассмотрим диагональ  $AC_1$  (рис. 148).

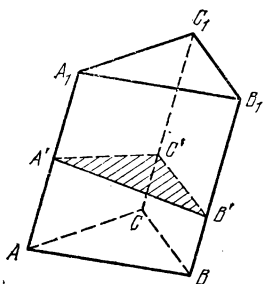


Рис. 147

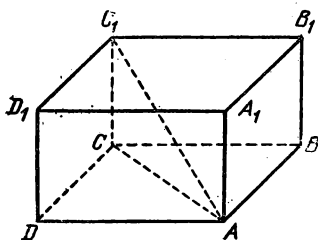


Рис. 148

Боковое ребро  $CC_1$  перпендикулярно плоскости основания  $ABCD$ , так как оно перпендикулярно ребрам  $CD$  и  $CB$ . Поэтому треугольник  $ACC_1$  прямоугольный. По теореме Пифагора находим

$$AC_1^2 = AC^2 + CC_1^2,$$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2.$$

Следовательно,

$$AC_1^2 = AB^2 + BC^2 + CC_1^2. \blacktriangle$$

### Вопросы для контроля

1. Какая прямая называется перпендикулярной плоскости?
2. Сформулируйте признак перпендикулярности прямой плоскости.
3. Сколько прямых, перпендикулярных плоскости, можно провести через данную точку этой плоскости?
4. Сколько плоскостей, перпендикулярных данной прямой, можно провести через данную точку этой прямой?
5. Что называется перпендикуляром, опущенным из данной точки на данную плоскость? Что называется основанием перпендикуляра?

6. Что называется наклонной, проведенной из данной точки к данной плоскости? Что называется основанием наклонной? Что называется ее проекцией?

7. Как связаны между собой перпендикуляр и наклонная, проведенные через одну точку к данной плоскости, и проекция этой наклонной?

8. Что называется расстоянием от точки до плоскости?

9. Что называется расстоянием между прямой и плоскостью? Между плоскостями?

10. Как определяется расстояние между скрещивающимися прямыми?

11. Сформулировать теорему о трех перпендикулярах.

12. Как определяется угол между прямой и плоскостью?

13. Что называется высотой пирамиды? Усеченной пирамиды?

14. Что называется высотой призмы?

15. Какое сечение призмы называется перпендикулярным? Любая ли призма имеет перпендикулярное сечение?

### Упражнения

4.33. Докажите, что если две прямые перпендикулярны одной плоскости, то эти прямые параллельны.

4.34. Докажите, что если две плоскости перпендикулярны одной прямой, то эти плоскости параллельны.

4.35. Через стороны  $AB$  и  $BC$  квадрата  $ABCD$  проведены плоскости  $p$  и  $q$ , которые пересекаются по прямой  $l$ . Докажите, что если  $l \perp AB$ , то  $AB \perp q$ .

4.36. Найдите расстояние от точки  $M$  до плоскости равнобедренного треугольника, если сторона этого треугольника равна  $3\sqrt{3}$  см, а расстояние от точки  $M$  до каждой из вершин треугольника равно 5 см.

4.37. В равнобедренном прямоугольном треугольнике  $ABC$  катеты равны  $a$  см. Из вершины прямого угла  $C$  проведен к плоскости этого треугольника перпендикуляр  $CD$ , причем  $CD = 2a$  см. Найдите расстояние от точки  $D$  до гипотенузы  $AB$ .

4.38. Катеты прямоугольного треугольника  $ABC$  равны 4 см и 3 см. Через вершину прямого угла  $C$  треугольника проведена прямая  $n$ , перпендикулярная плоскости  $ABC$ . Найдите расстояние от точки  $M \in n$  до гипотенузы треугольника, если  $MC = 2,6$  см.

4.39. Докажите, что если углы между прямой  $l$  и двумя непараллельными прямыми  $a$  и  $b$  плоскости  $p$  равны  $90^\circ$ , то  $l \perp p$ .

4.40. Прямая  $l$  перпендикулярна плоскости  $p$  и прямой  $m$ . Докажите, что  $m \parallel p$ .

4.41. Через точку  $O$  пересечения диагоналей параллелограмма  $ABCD$  проведена прямая  $OM$  так, что  $MA = MC$ ,  $MB = MD$ . Докажите, что прямая  $OM$  перпендикулярна плоскости параллелограмма.

4.42. Из некоторой точки к плоскости проведены перпендикуляр и наклонная, угол между которыми равен  $\varphi$ . Найдите длину наклонной и ее проекции на данную плоскость, если длина перпендикуляра равна  $h$ .



4.43. Через вершину  $B$  ромба  $ABCD$  проведена прямая  $BM$ , перпендикулярная его плоскости. Найдите расстояние от точки  $M$  до прямых, содержащих стороны ромба, если  $AB=25$  см,  $\angle BAD=60^\circ$ ,  $BM=12,5$  см.

4.44. Под каким углом к плоскости надо провести наклонную, чтобы ее проекция была вдвое меньше самой наклонной?

4.45. Боковое ребро призмы равно 20 см и составляет с плоскостью основания угол в  $30^\circ$ . Найдите высоту призмы.

4.46. Диагональ правильной четырехугольной призмы наклонена к боковой грани под углом  $\frac{\pi}{6}$ . Найдите угол между диагональю и основанием.

4.47. Основанием призмы является правильный шестиугольник со стороной  $a$ , а боковые грани — квадраты. Найдите диагонали призмы.

4.48. Высота правильной треугольной призмы равна  $H$ . Через ребро основания и противоположную ему вершину другого основания проведена плоскость. Найдите площадь сечения, если сторона основания равна высоте призмы.

4.49. Найдите диагонали прямоугольного параллелепипеда, если известны его измерения:

1) 2 см, 3 см, 6 см; 2) 6 дм, 6 дм, 7 дм; 3) 5 см, 6 см, 7 см.

4.50. Стороны основания прямого параллелепипеда равны  $3\sqrt{2}$  см и 24 см, угол между ними  $135^\circ$ , боковое ребро 12 см. Найдите диагонали параллелепипеда.

4.51. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 28 см, а боковое ребро 36 см. Найдите сторону основания.

4.52. Докажите, что у прямой призмы любое боковое ребро является высотой.

4.53. Докажите, что угол между боковым ребром и противоположным ребром основания правильной треугольной пирамиды равен  $90^\circ$ .

4.54. Найдите высоту правильной четырехугольной пирамиды, если ее боковое ребро равно  $b$ , а плоский угол при вершине равен  $\alpha$ .

4.55. Дана пирамида, высота которой равна 16 м, а площадь основания  $512$  м<sup>2</sup>. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проведенной параллельно основанию на расстоянии 5 м от вершины.

4.56. Высота пирамиды равна 16 м. Площадь основания равна  $512$  м<sup>2</sup>. На каком расстоянии от плоскости основания находится сечение, параллельное основанию, если его площадь  $50$  м<sup>2</sup>?

4.57. Высота пирамиды разделена на четыре равные части и через точки деления проведены плоскости, параллельные основанию. Площадь основания равна  $400$  см<sup>2</sup>. Найдите площади сечений.

## § 17. Двугранные углы. Перпендикулярность плоскостей

1. Двугранные углы. Рассмотрим некоторый угол и прямую, перпендикулярную сторонам этого угла. На рис. 149 это прямая  $MN$  и угол  $ABC$ . Объединение всех прямых, пересекающих данный угол и параллельных данной прямой, называется *двугранным углом*. Данная прямая

называется *ребром*, а данный угол — *линейным углом* этого двугранного угла.

На рис. 149 изображен двугранный угол  $AMNC$  с ребром  $MN$  и линейным углом  $ABC$ . Полуплоскости  $AMN$  и  $CMN$  с общей границей  $MN$  называются *гранями* этого двугранного угла.

Таким образом, двугранный угол — это фигура, образованная (ограниченная) двумя полуплоскостями с общей

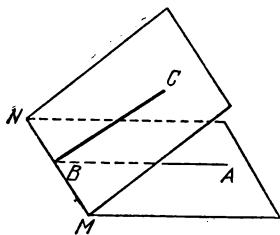


Рис. 149

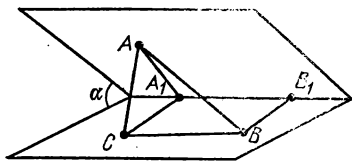


Рис. 150

границей. Полуплоскости называются *гранями*, а их общая граница — *ребром* двугранного угла.

*Величиной* (или *мерой*) двугранного угла называется величина (мера) его линейного угла.

Двугранный угол называется *острым*, *прямым* или *тупым* в зависимости от того, будет ли острым, прямым или тупым его линейный угол. Два двугранных угла называются *равными*, если равны их линейные углы.

Если мера одного из двугранных углов больше меры другого, то говорят, что первый двугранный угол *больше* второго, а второй *меньше* первого.

**Задача.** На гранях двугранного угла взяты две точки  $A$  и  $B$  (по одной на грани), расстояния которых от ребра равны  $a$  и  $b$ . Найти длину отрезка  $AB$ , если двугранный угол равен  $\alpha$ , а расстояние между проекциями точек  $A$ ,  $B$  на ребро равно  $c$ .

$\Delta$  Из точек  $A$  и  $B$  опустим перпендикуляры  $AA_1$  и  $BB_1$  на ребро двугранного угла (рис. 150). Через точку  $A_1$  в полуплоскости  $BA_1B_1$  к ребру проведем перпендикуляр  $CA_1$  такой, что  $CA_1 = BB_1$ .

Из построения следует, что  $A_1B_1BC$  — прямоугольник, прямая  $A_1B_1$  перпендикулярна плоскости  $AA_1C$  (так как  $A_1B_1$  перпендикулярна двум пересекающимся прямым  $CA_1$  и  $AA_1$ ), прямая  $BC$  тоже перпендикулярна этой плоскости (так как  $BC \parallel A_1B_1$ ) и, следовательно,  $BC \perp AC$ , т. е. треугольник  $ABC$  прямоугольный.

Из  $\triangle AA_1C$  по теореме косинусов и из  $\triangle ABC$  по теореме Пифагора находим

$$AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha,$$

$$AB^2 = AC^2 + c^2.$$

Следовательно,  $AB = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha + c^2}$ .  $\blacktriangle$

Заметим, что любые две пересекающиеся плоскости образуют четыре двугранных угла с общим ребром (рис. 151).

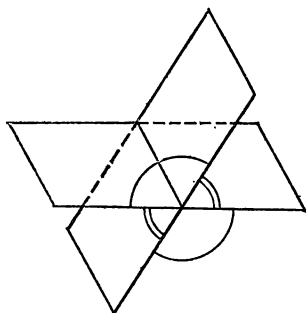


Рис. 151

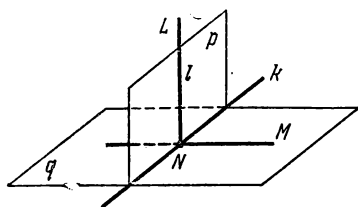


Рис. 152

Величина наименьшего из этих четырех двугранных углов называется *углом между пересекающимися плоскостями*. Угол между параллельными плоскостями считается равным нулю.

Угол между плоскостями  $p, q$  обозначается  $\angle(p; q)$ . Из определения следует, что если углы измеряются в градусах, то  $0^\circ \leq \angle(p; q) \leq 90^\circ$ , а если в радианах, то  $0 \leq \angle(p; q) \leq \frac{\pi}{2}$ .

**2. Перпендикулярные плоскости.** Две плоскости называются *перпендикулярными* (или *взаимно перпендикулярными*), если угол между ними прямой. Если плоскости  $p$  и  $q$  перпендикулярны, то пишут  $p \perp q$ .

Докажем следующий признак перпендикулярности двух плоскостей.

**Теорема.** Если плоскость проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны.

□ Пусть прямая  $l$  лежит в плоскости  $p$  и перпендикулярна плоскости  $q$  (рис. 152). Докажем, что  $p \perp q$ .

Пусть прямая  $l$  пересекает плоскость  $q$  в точке  $N$ , а плоскости  $p$  и  $q$  пересекаются по прямой  $k$ . Через точку  $N$

в плоскости  $q$  проведем прямую  $NM$ , перпендикулярную прямой  $k$ . Тогда  $\angle LNM$  — линейный угол двугранного угла, образованного плоскостями  $p$  и  $q$ . А так как  $l \perp q$ , то этот угол прямой. Следовательно,  $p \perp q$ . ■

**Задача.** Через данную прямую в пространстве провести плоскость, перпендикулярную данной плоскости.

△ Если прямая  $l$  перпендикулярна плоскости  $p$ , то, как доказано выше, любая плоскость, проходящая через прямую  $l$ , перпендикулярна плоскости  $p$ .

Пусть прямая  $l$  не перпендикулярна плоскости  $p$ . Через произвольную точку прямой  $l$  проводим прямую  $a$ , параллельную некоторой прямой, перпендикулярной плоскости  $p$  (см. теорему 2 и задачу 2 из п. 1 § 16). Плоскость  $q$ , проходящая через пересекающиеся прямые  $l$  и  $a$ , перпендикулярна плоскости  $p$  по признаку перпендикулярности плоскостей. ▲

### Вопросы для контроля

1. Что называется двугранным углом? Что называется ребром, линейным углом и гранями двугранного угла?
2. Что называется величиной (мерой) двугранного угла?
3. Какие двугранные углы называются равными?
4. В каком случае один двугранный угол больше другого?
5. Что называется углом между пересекающимися плоскостями?
6. Какие две плоскости называются перпендикулярными?
7. Сформулируйте признак перпендикулярности двух плоскостей.
8. Сколько плоскостей в пространстве можно провести через данную прямую перпендикулярно данной плоскости?

### Упражнения

4.58. Постройте пирамиду, в которой две несоседние боковые грани перпендикулярны плоскости основания.

4.59. Основание пирамиды — равнобедренный треугольник, у которого основание равно 12 см, а боковая сторона равна 10 см. Боковые грани образуют с основанием равные двугранные углы в  $45^\circ$  каждый. Найдите высоту пирамиды.

4.60. Найдите площадь сечения, проведенного через середины двух смежных боковых ребер правильной четырехугольной пирамиды со стороной основания  $a$  и высотой  $H$  перпендикулярно основанию пирамиды.

4.61. В правильной четырехугольной пирамиде плоскость, делящая двугранный угол при основании пополам, делит площадь противоположной грани в отношении 96:25 (считая от основания). Найдите высоту пирамиды, если сторона ее основания равна 3 см.

4.62. В правильной треугольной пирамиде через сторону основания проведена плоскость, перпендикулярная противолежащему

боковому ребру. Найдите площадь сечения, если сторона основания  $a$ , а высота пирамиды  $H$ .

4.63. Стороны оснований правильной треугольной усеченной пирамиды 2 см и 6 см. Боковая грань образует с большим основанием угол  $60^\circ$ . Найдите высоту.

4.64. Стороны оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды соответственно равны 56 см и 24 см, а высота равна 63 см. Найдите апофему этой пирамиды.

4.65. В правильной треугольной усеченной пирамиде, у которой стороны оснований 8 м и 5 м, а высота 3 м, проведено сечение через сторону нижнего основания и противоположную вершину верхнего основания. Найдите площадь сечения и двугранный угол между сечением и нижним основанием.

## § 18. Ортогональная проекция фигур

1. **Проекция точки и проекция прямой.** Ортогональной проекцией точки на плоскость называется основание перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную

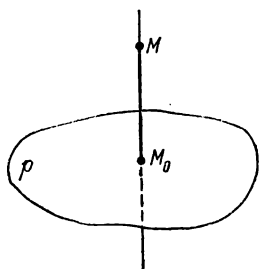


Рис. 153

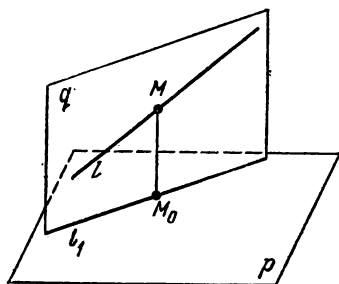


Рис. 154

плоскость, если точка не лежит в плоскости. Если точка лежит в плоскости, то она сама является своей проекцией на эту плоскость.

Очевидно, что для каждой точки  $M$  пространства существует единственная ортогональная проекция  $M_0$  этой точки на данную плоскость  $p$  (рис. 153). Плоскость  $p$  называется *плоскостью проекции*.

В дальнейшем для краткости, говоря об ортогональных проекциях, будем употреблять термин «проекция», опуская слово «ортогональная».

*Проекцией прямой* на данную плоскость называется множество всех точек, являющихся проекциями точек данной прямой на эту плоскость. Аналогично определяются проекции луча и отрезка.

Рассмотрим некоторые свойства проекций прямых.

1. Если прямая не перпендикулярна плоскости, то ее проекция на эту плоскость есть прямая, которая яв-

ляется пересечением плоскости проекции и перпендикулярной ей плоскости, проходящей через данную прямую.

□ Рассмотрим проекцию прямой  $l$  на плоскость  $p$  (рис. 154). Через прямую  $l$  проведем плоскость  $q$ , перпендикулярную плоскости  $p$  (см. задачу из п. 2 § 17). Прямая  $l_1$  пересечения  $p$  и  $q$  является проекцией прямой  $l$  на плоскость  $p$ . Действительно, проекция любой точки  $M \in l$  лежит на прямой  $l_1$  и любая точка  $M_0 \in l_1$  является проекцией некоторой точки прямой  $l$ , так как перпендикуляр  $MM_0$  к плоскости  $p$  лежит в плоскости  $q$ . ■

Из доказанного свойства следует, что проекции луча и отрезка, не перпендикулярных плоскости проектирования,

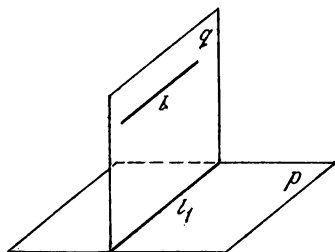


Рис. 155

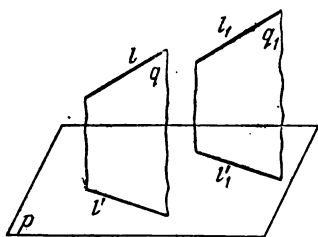


Рис. 156

представляют собой соответственно луч и отрезок. Очевидно, что данное ранее определение проекции наклонной к плоскости не противоречит определению проекции отрезка на плоскость.

Заметим, что если прямая  $l$  перпендикулярна плоскости  $p$ , то проекцией прямой  $l$  на плоскость  $p$  является точка пересечения прямой  $l$  и плоскости  $p$ .

2. Если прямая параллельна плоскости проекции, то она параллельна своей проекции.

□ Пусть прямая  $l$  параллельна плоскости  $p$  (рис. 155). Из свойства 1 следует, что ее проекция—это прямая  $l_1$  пересечения плоскости  $p$  и перпендикулярной  $p$  плоскости  $q$ , проходящей через прямую  $l$ , и поэтому  $l \parallel l_1$ . ■

Из свойства 2 следует, что проекция отрезка, параллельного плоскости проекции, есть отрезок, равный данному.

3. Проекции двух параллельных прямых, не перпендикулярных плоскости проекции,—параллельные прямые.

□ Пусть  $l'$  и  $l'_1$ —проекции параллельных прямых  $l$  и  $l_1$  на плоскость  $p$ . Через  $q$  и  $q_1$  обозначим плоскости, которые перпендикулярны плоскости  $p$  и проходят через прямые  $l$  и  $l_1$  соответственно (рис. 156). Эти плоскости

параллельны, следовательно, параллельны и прямые  $l'$  и  $l'_1$  как прямые пересечения параллельных плоскостей  $q$ ,  $q_1$  плоскостью  $p$ . ■

4. *Отношение длин проекций на плоскость двух параллельных отрезков, не перпендикулярных плоскости проекции, равно отношению длин этих отрезков.*

□ Вместо данных отрезков можно рассматривать равные им отрезки, лежащие на одной прямой. А так как прямая и ее проекция лежат в одной плоскости, то свойство 4 следует из теоремы о пропорциональных отрезках на плоскости. ■

**2. Проекция фигуры.** Проекцией фигуры на данную плоскость называется множество всех точек, являющихся проекциями точек данной фигуры на эту плоскость.

**Задача 1.** Изобразить проекцию треугольника  $ABC$  на данную плоскость  $p$ .

△ Если плоскость треугольника  $ABC$  не перпендикулярна плоскости  $p$ , то его проекцией на плоскость  $p$  будет некоторый треугольник  $A_1B_1C_1$  (рис. 157), так как проекция отрезка есть отрезок.

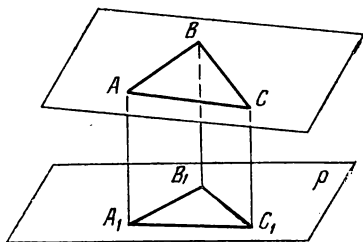


Рис. 157

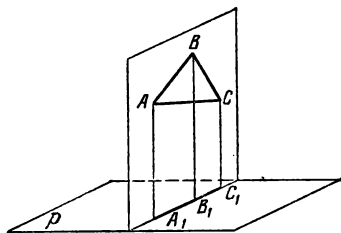


Рис. 158

Если плоскость треугольника  $ABC$  перпендикулярна плоскости  $p$ , то его проекцией на плоскость  $p$  будет отрезок. На рис. 158—это отрезок  $A_1C_1$ . ▲

**Задача 2.** Какова проекция ромба  $ABCD$  на плоскость  $p$ , если  $BD \perp p$ ?

△ Из признака перпендикулярности плоскостей следует, что плоскость ромба перпендикулярна плоскости  $p$  (рис. 159). Следовательно, его проекцией на плоскость  $p$  будет отрезок.

Так как диагонали ромба перпендикулярны, то диагональ  $AC$  данного ромба параллельна плоскости  $p$ , и поэтому ее проекция на эту плоскость — равный ей отрезок  $A_1C_1$ . Все точки диагонали  $BD$  проектируются в одну

точку — середину отрезка  $A_1C_1$ . Следовательно, проекцией данного ромба на плоскость  $p$  является отрезок  $A_1C_1$ . ▲

**3. Площадь проекции многоугольника.** Отметим, что здесь, как обычно, под многоугольником понимается плоский многоугольник, т. е. многоугольник, все вершины которого лежат в одной плоскости.

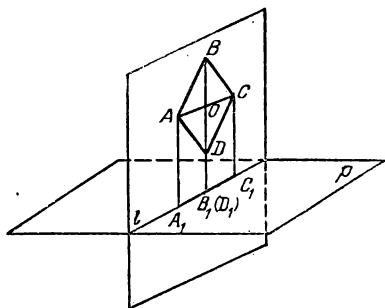


Рис. 159

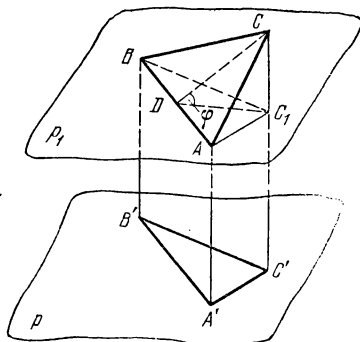


Рис. 160

**Теорема.** *Площадь проекции многоугольника на плоскость равна произведению площади этого многоугольника на косинус угла между плоскостью многоугольника и плоскостью проекции.*

□ Теорему достаточно доказать для треугольника, так как любой многоугольник можно разбить на треугольники, сумма площадей которых равна площади многоугольника.

Пусть треугольник  $ABC$  проектируется на плоскость  $p$ . Возможны два случая:

- 1) одна из сторон  $\triangle ABC$  параллельна плоскости  $p$ ;
- 2) ни одна из сторон  $\triangle ABC$  не параллельна плоскости  $p$ .

Рассмотрим эти два случая отдельно.

1) Пусть  $AB \parallel p$ . Через прямую  $AB$  проведем плоскость  $p_1$ , параллельную плоскости  $p$  (рис. 160). Пусть  $\triangle ABC_1$  и  $\triangle A'B'C'$  — проекции данного треугольника на плоскости  $p_1$  и  $p$ . Эти треугольники равны.

В треугольнике  $ABC$  из вершины  $C$  проведем высоту  $CD$ . По теореме о трех перпендикулярах ее проекция  $DC_1$  является высотой треугольника  $ABC_1$ , а угол  $CDC_1$  равен углу между плоскостью  $p$  и плоскостью треугольника  $ABC$ . Следовательно,

$$S_{\triangle ABC_1} = \frac{1}{2} AB \cdot C_1D = \frac{1}{2} AB \cdot CD \cdot \cos \varphi = S_{\triangle ABC} \cdot \cos \varphi.$$



2) Пусть ни одна из сторон  $\triangle ABC$  не параллельна плоскости  $p$ . Проведем плоскость  $p_1$ , параллельную плоскости  $p$ , через ближайшую к  $p$  вершину  $\triangle ABC$  (пусть это будет вершина  $A$ ).

Пусть  $\triangle AB_1C_1$  и  $\triangle A'B'C'$  — проекции данного треугольника на плоскости  $p_1$  и  $p$  (рис. 161). Через  $M$  обозначим точку пересечения прямой  $BC$  с плоскостью  $p_1$ . Тогда

$$S_{\triangle A'B'C'} = S_{\triangle AB_1C_1} = S_{\triangle AMC_1} - S_{\triangle AMB_1} =$$

$$= (S_{\triangle AMC} - S_{\triangle AMB}) \cos \varphi = S_{\triangle ABC} \cdot \cos \varphi. \blacksquare$$

**Задача.** Через сторону основания правильной треугольной призмы проведена плоскость под углом  $\varphi = 30^\circ$  к плоскости ее основания. Найти площадь образующегося сечения, если сторона основания призмы  $a = 6$  см.

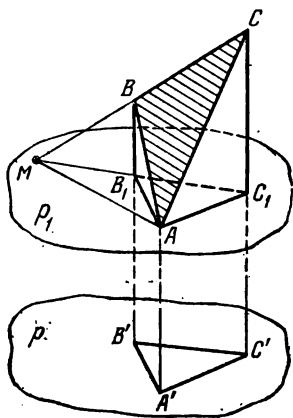


Рис. 161

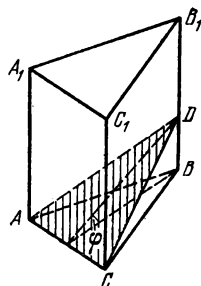


Рис. 162

$\triangle$  Пусть  $ACD$  — рассматриваемое сечение данной призмы  $ABCA_1B_1C_1$  (рис. 162).

Так как призма правильная, то ее боковые ребра перпендикулярны плоскости основания. Следовательно, треугольник  $ABC$  есть проекция треугольника  $ADC$ , поэтому

$$S_{\triangle ADC} = \frac{1}{\cos \varphi} S_{\triangle ABC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4 \cos \varphi}.$$

По условию  $a = 6$  см,  $\cos \varphi = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Подставив эти значения, получим  $S_{\triangle ADC} = 18$  см<sup>2</sup>.  $\blacktriangle$

#### Вопросы для контроля

1. Что называется ортогональной проекцией точки на плоскость?
2. Что называется проекцией прямой на плоскость?

3. В каком случае проекция прямой является прямой? Что может быть проекцией прямой на плоскость?

4. В каком случае прямая параллельна своей проекции?

5. Всегда ли прямые, являющиеся проекциями параллельных прямых, параллельны?

6. Что называется проекцией фигуры на плоскость?

7. Какой вид может иметь проекция параллелограмма?

8. Чему равна площадь проекции многоугольника?

### Упражнения

4.66. Каковы проекции двух прямых на плоскость, если: 1) прямые пересекаются; 2) прямые скрещиваются; 3) прямые параллельны. Рассмотрите все возможные случаи.

4.67. На модели куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  укажите проекции на плоскость грани  $AA_1 B_1 B$  отрезков  $C_1 D_1$ ,  $AD$ ,  $C_1 D$  и  $DB_1$ , треугольников  $C_1 CD$  и  $ACD$ , квадрата  $BB_1 C_1 C$ .

4.68. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна  $m$ , а острый угол —  $60^\circ$ . Найдите площадь проекции этого треугольника на плоскость, составляющую с плоскостью треугольника угол  $30^\circ$ .

4.69. Стороны треугольника равны 3,9 см, 4,1 см и 2,8 см. Найдите площадь его проекции на плоскость, составляющую с плоскостью треугольника угол  $60^\circ$ .

4.70. Докажите, что площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна площади основания, деленной на косинус угла между плоскостью боковой грани и плоскостью основания.

## § 19\*. Многогранники

**1. Понятие о выпуклом многограннике и его поверхности.** Простейшими примерами многогранников являются рассмотренные в предыдущих параграфах пирамиды и призмы.

С древнейших времен в техническом творчестве человека преобладают пространственные формы в виде многогранников; примерами могут служить спичечные коробки, египетские пирамиды, многие башни, здания и различные инженерные сооружения. Большинство минералов имеет кристаллическое строение в виде различных многогранников.

Дадим общее определение выпуклого многогранника.

Множество точек пространства называется *ограниченным*, если существует шар, содержащий это множество. Примерами ограниченных множеств являются шар, пирамида, призма. Полупространство и, например, трехгранный угол являются неограниченными множествами.

Точка пространства называется *граничной точкой множества*, если в любом шаре с центром в этой точке содер-

жаты как точки, принадлежащие данному множеству, так и точки, не принадлежащие ему. Множество всех граничных точек данного множества называется его *границей*.

Множество называется *замкнутым*, если оно содержит все свои граничные точки. Множество называется *открытым*, если ни одна из его граничных точек не принадлежит ему. Примерами замкнутых множеств являются полупространство, двугранный угол, шар. Границами этих множеств являются соответственно плоскость, объединение двух полуплоскостей, сфера.

Множество точек пространства называется *выпуклым*, если любые его две точки можно соединить отрезком, принадлежащим ему. Примерами выпуклых множеств являются шар, треугольная пирамида, полупространство, трехгранный угол.

Ограниченное выпуклое множество (открытое или замкнутое) точек пространства называется *выпуклым многогранником* (соответственно *открытым* или *замкнутым*), если его граница состоит из конечного числа многоугольников. Эти многоугольники называются *гранями* данного многогранника, а стороны граней — *ребрами* многогранника.

Граница многогранника называется *поверхностью многогранника*. Площадь поверхности многогранника равна сумме площадей всех его граней.

**2. Правильные многогранники.** Выпуклый многогранник называется *правильным*, если все его грани — равные правильные многоугольники и к каждой его вершине сходится одно и то же число ребер. Примером правильного многогранника является куб.

У правильного многогранника все двугранные углы равны, все плоские углы равны и все ребра равны.

В любой правильный многогранник можно вписать сферу, и около любого правильного многогранника можно описать сферу, причем центры этих сфер совпадают. Общий центр вписанной и описанной сфер правильного многогранника называется *центром* этого многогранника.

**Задача.** Доказать, что не существует правильного многогранника, гранями которого являются  $n$ -угольники при  $n > 5$ .

$\Delta$  Доказательство будем проводить методом от противного. Пусть существует правильный многогранник, гранями которого являются правильные  $n$ -угольники,  $n > 5$ , и  $\alpha$  — угол этого  $n$ -угольника.

Легко подсчитать, что  $\alpha = \pi \left(1 - \frac{2}{n}\right)$ . Поэтому если  $n \geq 6$ , то  $\alpha \geq \frac{2}{3}\pi$ . А так как при каждой вершине многогранника не менее трех плоских углов, то в рассматриваемом случае их сумма не меньше  $2\pi$ , что невозможно (см. теорему 2 п. 2\* § 13).

Полученное противоречие показывает, что наше предположение неверно. Следовательно, гранями правильного многогранника могут быть только правильные треугольники, квадраты и правильные пятиугольники. ▲

Из предыдущей задачи и теоремы о сумме плоских углов выпуклого многогранного угла следует, что каждая

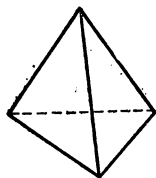


Рис. 163

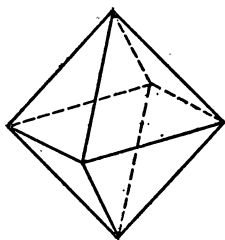


Рис. 164

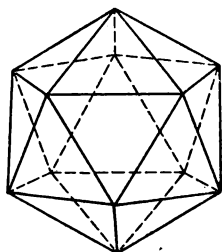


Рис. 165

вершина правильного многоугольника может быть вершиной либо трех, четырех или пяти правильных треугольников, либо трех квадратов, либо трех правильных пятиугольников. Следовательно, может существовать только пять типов правильных многогранников.

1. Правильный тетраэдр (рис. 163). Каждая его вершина является вершиной трех треугольников; все его грани — правильные треугольники; в каждой вершине сходятся три ребра. У тетраэдра 4 вершины, 6 ребер и 4 грани.

2. Правильный октаэдр (рис. 164). Каждая его вершина является вершиной четырех треугольников, все его грани — правильные треугольники; в каждой вершине сходятся четыре ребра. У октаэдра 6 вершин, 12 ребер и 8 граней.

3. Правильный икосаэдр (рис. 165). Каждая его вершина является вершиной пяти треугольников; все его грани — правильные треугольники; в каждой его вершине сходятся пять ребер. У икосаэдра 12 вершин, 30 ребер и 20 граней.

4. Куб (рис. 166). Каждая его вершина является вершиной трех квадратов; все его грани — квадраты; в каждой его вершине сходятся три ребра. У куба 8 вершин, 12 ребер и 6 граней.

5. Правильный додекаэдр (рис. 167). Каждая его вершина является вершиной трех пятиугольников; все его грани — правильные пятиугольники; в каждой его вершине сходятся три ребра. У додекаэдра 20 вершин, 30 ребер и 12 граней.

Правильные многогранники были известны еще в Древней Греции (в V в. до н. э.). Первые упоминания о них были у Платона, с тех пор они получили название пяти

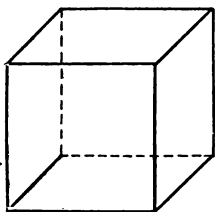


Рис. 166

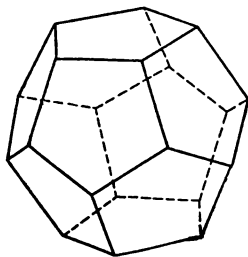


Рис. 167

платоновых тел. Знаменитая книга «Начала» Евклида начиналась описанием построения правильного треугольника и заканчивалась описанием пяти правильных многогранных тел. Правильные многогранники до сего времени сохранили греческие названия: тетраэдр означает четырехгранник, октаэдр — восьмигранник, додекаэдр — двенадцатигранник, икосаэдр — двадцатигранник.

Легко проверить, что число  $V$  вершин, число  $P$  ребер и число  $\Gamma$  граней у правильных многогранников связаны формулой Эйлера:

$$V - P + \Gamma = 2.$$

Эйлер доказал, что эта формула верна не только для правильных многогранников, но и для любого выпуклого многогранника.

#### Вопросы для контроля

1. Какое множество точек пространства называется ограниченным?

2. Какая точка пространства называется граничной точкой множества точек?

3. Что называется границей множества?
4. Какое множество называется замкнутым? открытым?
5. Какое множество точек пространства называется выпуклым?
6. Что называется выпуклым многогранником?
7. Какой многогранник называется правильным?
8. Что называется центром правильного многогранника?
9. Сколько существует типов правильных многогранников?

Назовите их.

10. Существует ли правильный многогранник, гранями которого являются шестиугольники?

11. Написать формулу Эйлера для выпуклых многогранников.

### Упражнения

4.71. У двух правильных многогранников ребра равны, а площади поверхностей относятся как  $\sqrt{3}:6$ . Определите вид этих многогранников.

4.72. Если обозначить ребро правильного многогранника через  $a$ , то площадь его поверхности равна  $5a^2 \sqrt{3}$ . Определите вид многогранника.

4.73. Найдите величину двугранного угла

- 1) правильного тетраэдра;
- 2) правильного октаэдра;
- 3) правильного икосаэдра.

## ВЕКТОРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

## § 20. Сложение векторов и умножение вектора на число

**1. Сумма и разность векторов.** В пространстве, как и на плоскости, два направленных отрезка считаются *равными*, если они имеют равные длины, параллельны и направлены в одну сторону. Направленные отрезки, для которых таким образом определено равенство, называются *векторами* (или *свободными векторами*). Длина отрезка, который изображает вектор, называется *длиной* этого вектора.

Как и на плоскости, доказывается, что в пространстве от любой точки можно отложить вектор, равный данному.

Пусть даны два вектора  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ . От некоторой точки  $O$  пространства отложим вектор  $\overrightarrow{OA}$ , равный вектору  $\mathbf{a}$ , а затем от точки  $A$  отложим вектор  $\overrightarrow{AB}$ , равный вектору  $\mathbf{b}$ . Тогда вектор  $\mathbf{c} = \overrightarrow{OB}$  называется *суммой векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$*  и обозначается  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ . Таким образом,

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}.$$

Это равенство называется *правилом треугольника* сложения двух векторов.

Сложение векторов обладает *свойством переместительности*:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a},$$

и *свойством сочетательности*:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}).$$

Если требуется найти сумму трех или большего числа векторов, то применяется *правило многоугольника*. Например,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}.$$

**Задача 1.** Дан параллелепипед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Найти сумму векторов  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{B_1 C_1}$ ,  $\overrightarrow{C C_1}$ ,  $\overrightarrow{B_1 A_1}$ ,  $\overrightarrow{B_1 B}$  (рис. 168).

△ Из свойств ребер параллелепипеда следует, что  $\overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{BC}$ ,  $\overrightarrow{B_1A_1} = \overrightarrow{C_1D_1}$ ,  $\overrightarrow{B_1B} = \overrightarrow{D_1D}$ . Поэтому

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{B_1B} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{C_1D_1} + \overrightarrow{D_1D}.$$

Применив правило многоугольника, получим (рис. 169)

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{C_1D_1} + \overrightarrow{D_1D} = \overrightarrow{AD}. \blacktriangle$$

Задача 2. Найти сумму  $\overrightarrow{KD} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{CK}$ .

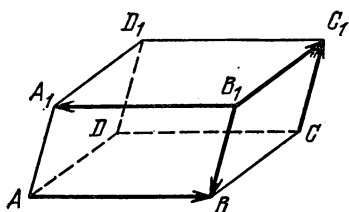


Рис. 168

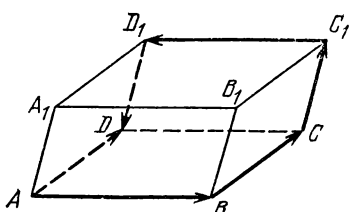


Рис. 169

△ Применяя свойство переместительности сложения векторов, получаем

$$\overrightarrow{KD} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{CK} = \overrightarrow{KD} + \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CK}.$$

Теперь по правилу многоугольника находим

$$\overrightarrow{KD} + \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CK} = \overrightarrow{KK} = \mathbf{0}. \blacktriangle$$

Задача 3. Дана треугольная пирамида ABCD (рис. 170). Найти сумму  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA}$ .

△ Применяя свойства переместительности и сочетательности сложения векторов, получим

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} &= \\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}. \blacktriangle \end{aligned}$$

Два вектора называются *противоположными*, если их сумма равна нулевому вектору. Вектор, противоположный

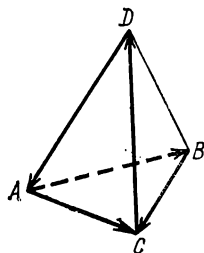


Рис. 170



вектору  $a$ , обозначается  $-a$ . Вектор  $c = a + (-b)$  называется *разностью векторов  $a$  и  $b$*  обозначается  $a - b$ .

**2. Умножение вектора на число. Коллинеарные векторы.** Произведением вектора  $a \neq 0$  на число  $x \neq 0$  называется вектор, длина которого равна  $|x| \cdot |a|$ , а направление совпадает с  $a$ , если  $x > 0$ , и противоположно ему, если  $x < 0$ . Если  $|x| \cdot |a| = 0$ , то по определению  $xa = 0$ .

Умножение вектора на число обладает *свойством сочетательности*:

$$x(ya) = (xy)a,$$

и *свойством распределительности*:

$$\begin{aligned} xa + ya &= (x + y)a, \\ xa + xb &= x(a + b). \end{aligned}$$

Два ненулевых вектора называются *коллинеарными*, если их направления совпадают или противоположны. Нулевой вектор коллинеарен любому вектору.

**3. Компланарные векторы. Разложение вектора по трем некомпланарным векторам.** Говорят, что *вектор  $\overrightarrow{AB}$  параллелен данной плоскости*, если прямая  $AB$  параллельна этой плоскости. Нулевой вектор считается параллельным любой плоскости.

Векторы называются *компланарными*, если они параллельны одной и той же плоскости. Таким образом, векторы называются компланарными, если равные им векторы, отложенные от одной точки, лежат в одной плоскости. В противном случае векторы называются *некомпланарными*.

Очевидно, что любые два вектора в пространстве компланарны, а три вектора могут быть как компланарными, так и некомпланарными. Например, в треугольной пирамиде  $ABCD$  (рис. 171) векторы  $\overrightarrow{AC}$ ,  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{BC}$  компланарны, так как они лежат в одной плоскости, проходящей через точки  $A, B, C$ . Векторы  $\overrightarrow{DA}$ ,  $\overrightarrow{DB}$ ,  $\overrightarrow{CD}$  являются некомпланарными.

**Задача 1.** Доказать, что сумма трех некомпланарных векторов равна вектору, изображаемому направленной диагональю параллелепипеда, построенного на этих векторах.

Это правило сложения трех некомпланарных векторов называется *правилом параллелепипеда*.

△ Пусть векторы  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  некопланарны. От произвольной точки  $O$  отложим векторы  $\vec{OA} = \mathbf{a}$ ,  $\vec{OB} = \mathbf{b}$  и  $\vec{OC} = \mathbf{c}$  (рис. 172) и построим параллелепипед, для которого отрезки  $OA$ ,  $OB$  и  $OC$  являются ребрами. Пусть

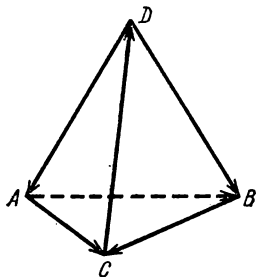


Рис. 171

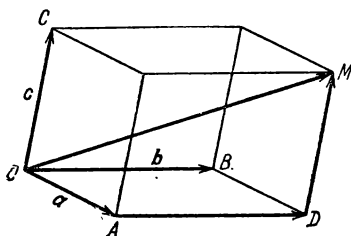


Рис. 172

$OM$  — диагональ этого параллелепипеда. Так как  $\vec{OB} = \vec{AD}$  и  $\vec{OC} = \vec{DM}$ , то

$$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AD} + \vec{DM} = \vec{OM},$$

т. е.

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \vec{OM}. \blacktriangle$$

Говорят, что вектор  $\mathbf{m}$  разложен по векторам  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$ , если он представлен в виде суммы

$$\mathbf{m} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c},$$

где  $x$ ,  $y$ ,  $z$  — некоторые числа. В этом случае говорят также, что вектор  $\mathbf{m}$  представлен в виде линейной комбинации векторов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$ .

**Теорема.** Любой вектор в пространстве может быть разложен, и притом единственным образом, по любым трем некопланарным векторам.

□ Пусть векторы  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  некопланарны. Если вектор  $\mathbf{m}$  компланарен, например, векторам  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ , то векторы  $\vec{OA} = \mathbf{a}$ ,  $\vec{OB} = \mathbf{b}$  и  $\vec{OM} = \mathbf{m}$  лежат в одной плоскости. Из некопланарности векторов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  следует, что векторы  $\vec{OA}$  и  $\vec{OB}$  являются неколлинеарными. Тогда по теореме о разложении вектора на плоскости по двум неколлинеарным векторам получаем: существуют числа  $x$  и

$y$  такие, что

$$\vec{OM} = x\vec{OA} + y\vec{OB}.$$

Следовательно,

$$m = xa + yb + 0 \cdot c.$$

Пусть вектор  $m$  некомпланарен никаким двум векторам из векторов  $a, b, c$ . Отложим векторы  $a, b, c$  и  $m$  от некоторой точки  $O$ :

$$a = \vec{OA}, \quad b = \vec{OB}, \quad c = \vec{OC} \quad \text{и} \quad m = \vec{OM}$$

(рис. 173).

Через точку  $M$  проведем прямую, параллельную прямой  $OC$ . Эта прямая пересечет плоскость  $OAB$  в некоторой точке  $N$ . Ясно, что  $\vec{OM} = \vec{ON} + \vec{NM}$ .

Так как вектор  $\vec{NM}$  коллинеарен вектору  $c$ , то существует число  $z$  такое, что  $\vec{NM} = z\vec{c}$ . Так как вектор  $\vec{ON}$

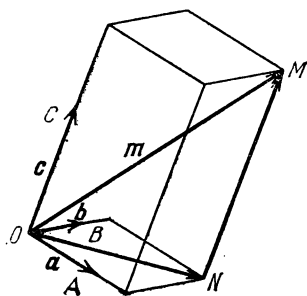


Рис. 173

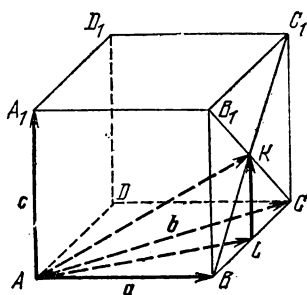


Рис. 174

лежит в плоскости  $OAB$  и векторы  $\vec{OA}$  и  $\vec{OB}$  неколлинеарны, то существуют числа  $x$  и  $y$  такие, что  $\vec{ON} = xa + yb$ .

Таким образом,

$$\vec{OM} = \vec{ON} + \vec{NM} = xa + yb + zc.$$

Единственность такого разложения докажете самостоятельно. ■

**Задача 2.** Дан куб  $ABCA_1B_1C_1D_1$ . Разложить вектор  $\vec{AK}$ , где  $K$  — центр грани  $BCC_1B_1$ , по векторам  $a = \vec{AB}$ ,  $b = \vec{AC}$ ,  $c = \vec{AA_1}$  (рис. 174).

△ Из △  $AKL$  имеем,  $\vec{AK} = \vec{AL} + \vec{LK}$ , но

$$\vec{AL} = \frac{\vec{AB} + \vec{AC}}{2} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2}, \quad \text{а} \quad \vec{LK} = \frac{\vec{AA_1}}{2} = \frac{\mathbf{c}}{2}.$$

Следовательно,

$$\vec{AK} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2} + \frac{\mathbf{c}}{2} = \frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b} + \frac{1}{2}\mathbf{c}. \quad \blacktriangle$$

### Вопросы для контроля

1. Какие направленные отрезки называются равными? Что называется векторами?
  2. Что называется длиной вектора?
  3. Какой вектор называется суммой двух данных векторов?
  4. Какими свойствами обладает сложение векторов?
  5. Сформулируйте правило многоугольника сложения векторов.
  6. Какие два вектора называются противоположными?
  7. Как определяется разность двух векторов?
  8. Что называется произведением вектора на число?
  9. Какими свойствами обладает операция умножения вектора на число?
  10. Какие два вектора называются коллинеарными?
  11. В каком случае векторы называются компланарными?
  12. Сформулируйте правило параллелепипеда сложения трех некомпланарных векторов.
  13. Что называется разложением вектора по трем данным векторам?
  14. Любой ли вектор в пространстве можно разложить (представить в виде линейной комбинации) по трем данным некомпланарным векторам?
- Будет ли единственным такое разложение?

### Упражнения

5.1. Дан тетраэдр  $SABC$ . Найдите сумму векторов:

1)  $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CS}$ ; 2)  $\vec{AC} + \vec{CS} + \vec{SA} + \vec{AB}$ .

5.2. Дана правильная четырехугольная пирамида  $SABCD$  ( $S$  — вершина,  $O$  — основание высоты). Докажите, что сумма векторов  $\vec{OS}$ ,  $\vec{DS}$ ,  $\vec{BC}$ ,  $\vec{SB}$ ,  $\vec{AO}$  равна сумме векторов  $\vec{AS}$ ,  $\vec{AD}$ ,  $\vec{AB}$ ,  $\vec{DA}$ .

5.3. Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Найдите разложение по векторам  $\mathbf{a} = \vec{AB}$ ,  $\mathbf{b} = \vec{AD}$ ,  $\mathbf{c} = \vec{AA_1}$  векторов:

1)  $\vec{AC_1}$ ; 2)  $\vec{AB_1}$ ; 3)  $\vec{D_1C_1}$ ; 4)  $\vec{B_1D_1}$ ;

5)  $\vec{BC}$ ; 6)  $\vec{C_1C}$ ; 7)  $\vec{B_1D}$ ; 8)  $\vec{B_1O}$ , где  $O$  — центр куба.

## § 21. Базисы и декартовы системы координат в пространстве

**1. Базис в пространстве. Координаты вектора.** Любые три некомпланарных вектора в пространстве, взятые в определенном порядке, называются *базисом* (или *векторным базисом*) в пространстве.

Если векторы  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  некомпланарны, то из них можно образовать шесть базисов:  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ ;  $\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}$  и т. д.

Используя понятие базиса в пространстве, теорему, доказанную в последнем пункте предыдущего параграфа, можно сформулировать следующим образом:

*любой вектор в пространстве имеет, и притом единственное, разложение по базису.*

Это утверждение называется *теоремой о разложении вектора по базису*.

Пусть в пространстве задан некоторый базис  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ . Тогда по теореме о разложении вектора по базису для любого вектора  $\mathbf{a}$  в пространстве существуют числа  $a_1, a_2, a_3$  такие, что

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3.$$

Числа  $a_1, a_2$  и  $a_3$  называются *координатами вектора*  $\mathbf{a}$  в данном базисе. В этом случае пишут  $\mathbf{a} = (a_1; a_2; a_3)$ .

**Задача 1.** Пусть векторы  $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}$ , изображенные соответствующими направленными ребрами треугольной пирамиды  $ABCD$ , образуют базис. Найти координаты вектора  $\overrightarrow{AB}$  в этом базисе.

△ Воспользуемся рис. 171. Обозначив  $\overrightarrow{DA} = \mathbf{e}_1$ ,  $\overrightarrow{DB} = \mathbf{e}_2$ ,  $\overrightarrow{DC} = \mathbf{e}_3$ , получим  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA} = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$  или  $\overrightarrow{AB} = -1 \cdot \mathbf{e}_1 + 1 \cdot \mathbf{e}_2 + 0 \cdot \mathbf{e}_3$ , откуда  $\overrightarrow{AB} = (-1; 1; 0)$ . ▲

**2. Действия над векторами, заданными своими координатами.** Если векторы в пространстве заданы своими координатами в некотором базисе  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ , то действия над ними выполняются по следующим правилам:

1. При сложении двух или большего числа векторов их соответственные координаты складываются, т. е. если  $\mathbf{a} = (a_1; a_2; a_3)$  и  $\mathbf{b} = (b_1; b_2; b_3)$ , то

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3).$$

2. При вычитании векторов их соответственные координаты вычитаются, т. е.

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3).$$

3. При умножении вектора на число все его координаты умножаются на это число, т. е.

$$ka = (ka_1; ka_2; ka_3).$$

Доказательство этих правил проводится так же, как и для векторов на плоскости.

3. **Ортогональный базис.** Длина вектора, заданного координатами в ортогональном базисе. Базис в пространстве называется *ортогональным* (или *прямоугольным декартовым*), если его векторы единичные и попарно ортогональные. Единичные векторы такого базиса обозначают обычно буквами  $i, j, k$  и называют *ортами*. Координаты вектора в этом базисе обозначают буквами  $x, y, z$  с разными индексами.

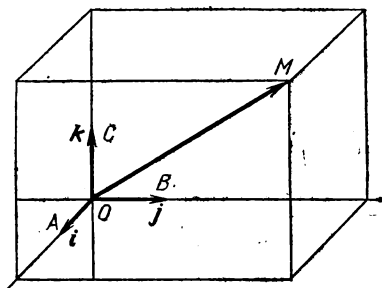


Рис. 175

В дальнейшем, если нет никаких пояснений, под словами «вектор имеет координаты  $x, y, z$ » подразумевается, что  $x, y, z$  — координаты этого вектора в некотором ортогональном базисе.

**Теорема.** Если вектор  $a$  в некотором ортогональном базисе имеет координаты  $x, y$  и  $z$ , то

$$|a| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (1)$$

□ Пусть  $x, y, z$  — координаты вектора  $a$  в ортогональном базисе  $i, j, k$ :

$$a = xi + yj + zk.$$

Отложим векторы  $i, j, k$  и  $a$  от некоторой точки  $O$ :  $\vec{OA} = i, \vec{OB} = j, \vec{OC} = k, \vec{OM} = a$ .

Прямые  $OA, OB$  и  $OC$  являются попарно перпендикулярными (рис. 175).

Пусть точка  $M$  не лежит ни в плоскости  $OAB$ , ни в плоскости  $OBC$ , ни в плоскости  $OAC$ . Тогда  $OM$  — диагональ прямоугольного параллелепипеда с измерениями  $x, y, z$ . Следовательно,

$$OM^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

т. е.  $|a|^2 = x^2 + y^2 + z^2$ .

Если точка  $M$  лежит, например, в плоскости  $OAB$ , то  $z=0$  и  $OM^2=x^2+y^2$ . Аналогично рассматриваются и другие случаи. ■

4. **Прямоугольная декартова система координат.** Пусть в пространстве задана точка  $O$  и некоторый ортогональный базис  $i, j, k$ . Совокупность этого базиса и точки  $O$  называется *прямоугольной декартовой системой координат*  $O, i, j, k$ . Точка  $O$  называется *началом координат*.

Отложим базисные векторы  $i, j, k$  от начальной точки  $O$ :  $\vec{OA}=i, \vec{OB}=j, \vec{OC}=k$ .

Прямые  $OA, OB$  и  $OC$  называются *координатными прямыми*. Единичные векторы  $i, j, k$  задают на этих прямых направления, поэтому прямые  $OA, OB$  и  $OC$  называются еще *координатными осями*. Прямая  $OA$  называется *осью абсцисс* и обозначается  $Ox$ , прямая  $OB$  называется *осью ординат* и обозначается  $Oy$ , прямая  $OC$  называется *осью аппликат* и обозначается  $Oz$ .

Пусть в пространстве выбрана некоторая прямоугольная декартова система координат  $O, i, j, k$ . Координаты радиус-вектора точки  $M$ , т. е. вектора  $\vec{OM}$ , называются

*координатами точки  $M$*  в данной системе координат. Если  $x, y, z$  — координаты точки  $M$ , то будем писать  $M(x; y; z)$  (рис. 176).

Очевидно, что точка в пространстве однозначно определяется своими координатами в данной системе координат.

В тех случаях, когда нет необходимости, базисные векторы  $i, j, k$  на рисунках не изображают, а указывают лишь

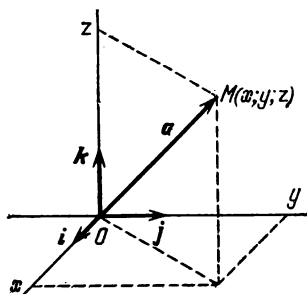


Рис. 176

направления на осях  $Ox, Oy$  и  $Oz$ . В этом случае систему координат  $O, i, j, k$  называют системой координат  $Oxyz$ .

В пространстве, как и на плоскости, доказываем, что если известны координаты начала и конца вектора  $\vec{AB}$ :  $A(x_1; y_1; z_1)$  и  $B(x_2; y_2; z_2)$ , то

$$\vec{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1).$$

Следовательно, чтобы найти координаты вектора, зная координаты его начала и конца, надо из координат его конца вычесть одноименные координаты его начала.

## Вопросы для контроля

1. Что называется векторным базисом в пространстве?
2. Сформулируйте теорему о разложении вектора по базису.
3. Что называется координатами вектора?
4. Чему равны координаты суммы (разности) двух векторов?
5. Чему равны координаты произведения вектора на число?
6. Какой базис называется ортогональным?
7. Как вычисляется длина вектора, если известны его координаты в ортогональном базисе?
8. Из чего состоит прямоугольная декартова система координат?
9. Что называется осью абсцисс, осью ординат, осью аппликат?
10. Как найти координаты вектора, если известны координаты его начала и конца?

## Упражнения

5.4. Дан треугольник  $ABC$ . Взяв за базис векторы  $\vec{e}_1 = \vec{AB}$ ,  $\vec{e}_2 = \vec{AC}$ , найдите координаты векторов  $\vec{AM}$ ,  $\vec{BN}$ ,  $\vec{CP}$  в этом базисе. Точки  $M$ ,  $N$ ,  $P$  — середины сторон  $BC$ ,  $AC$ ,  $AB$  треугольника.

5.5. В кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  (рис. 177) точки  $M$ ,  $N$ ,  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $S$ ,  $T$  — середины ребер. За базис приняты векторы  $\vec{i} = \vec{BA}$ ,  $\vec{j} = \vec{BC}$ ,  $\vec{k} = \vec{BB}_1$ . Разложите по базису  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  следующие векторы:

- 1)  $\vec{DT}$ ; 2)  $\vec{AB}_1$ ; 3)  $\vec{NP}$ ; 4)  $\vec{PQ}$ ;
- 5)  $\vec{QS}$ ; 6)  $\vec{B_1D}$ ; 7)  $\vec{RM}$ ; 8)  $\vec{RN}$ .

5.6. В прямоугольной декартовой системе координат даны точки  $A(3; -1; 2)$  и  $B(-1; 2; 2)$ . Найдите координаты векторов  $\vec{AB}$  и  $\vec{BA}$ , их длины и координаты единичного вектора, направленного так же, как и вектор  $\vec{BA}$ .

5.7. Дан вектор  $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$ . Найдите вектор  $\vec{b}$ , если  $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ , абсцисса вектора  $\vec{b}$  равна ординате вектора  $\vec{a}$ , а ордината вектора  $\vec{b}$  равна нулю.

5.8. Вычислите длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$ ,  $\vec{b} = \vec{k} - 2\vec{j}$ .

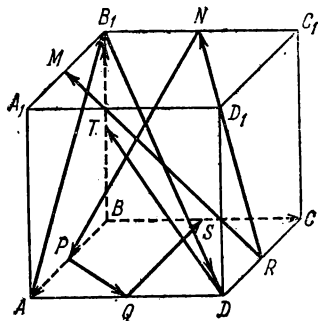


Рис. 177

## § 22. Скалярное произведение векторов

1. **Проекция вектора на ось и ее свойства.** Пусть в пространстве задана ось  $l$  с единичным вектором  $\vec{e}$ . Ортогональной проекцией (или просто проекцией) вектора  $\vec{a}$  на ось  $l$  называется число, равное произведению длины



вектора  $\mathbf{a}$  на косинус угла между векторами  $\mathbf{e}$  и  $\mathbf{a}$ . Проекция вектора  $\mathbf{a}$  на ось  $l$  обозначается  $\text{пр}_l \mathbf{a}$  или  $\text{пр}_e \mathbf{a}$ . Следовательно,

$$\text{пр}_l \mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cdot \cos \angle(\mathbf{e}; \mathbf{a}).$$

В пространстве, как и на плоскости, доказываются следующие свойства проекций.

1. *Проекция суммы векторов равна сумме проекций этих векторов:*

$$\text{пр}_l (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \text{пр}_l \mathbf{a} + \text{пр}_l \mathbf{b}.$$

2. *Проекция произведения вектора на число равна произведению проекции данного вектора на это число:*

$$\text{пр}_l k\mathbf{a} = k \text{пр}_l \mathbf{a}.$$

2. **Скалярное произведение двух векторов.** Скалярным произведением двух ненулевых векторов называется произведение длин этих векторов на косинус угла между ними. Если хотя бы один из векторов нулевой, то их скалярное произведение равно нулю.

Скалярное произведение векторов  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  обозначается  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ .

Следовательно,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos \varphi,$$

где  $\varphi$  — угол между векторами  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ .

Из этого определения и определения проекции вектора на ось следует, что

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot \text{пр}_a \mathbf{b} = |\mathbf{b}| \cdot \text{пр}_b \mathbf{a}.$$

Скалярное произведение векторов обладает *переместительным свойством*:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a},$$

*сочетательным свойством*:

$$(k\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = k(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$$

и *распределительным свойством*:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}.$$

Как и для векторов на плоскости, доказывается, что *два ненулевых вектора в пространстве ортогональны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю.*

3. Скалярное произведение векторов, заданных своими координатами. Пусть в пространстве имеется некоторая прямоугольная декартова система координат и заданы векторы  $\mathbf{a} = (x_1; y_1; z_1)$ ,  $\mathbf{b} = (x_2; y_2; z_2)$ . Тогда

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (x_1 \mathbf{i} + y_1 \mathbf{j} + z_1 \mathbf{k})(x_2 \mathbf{i} + y_2 \mathbf{j} + z_2 \mathbf{k}) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2,$$

так как

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1, \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0.$$

Следовательно, скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений одноименных координат этих векторов:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

Получим отсюда формулу для вычисления угла между векторами. Пусть  $\varphi$  — угол между векторами. Тогда

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos \varphi,$$

и поэтому, если  $\mathbf{a} \neq 0$  и  $\mathbf{b} \neq 0$ , то

$$\cos \varphi = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|}.$$

Запишем эту формулу в координатах:

$$\cos \varphi = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \quad (1)$$

**Задача.** Найти косинус угла между векторами  $\mathbf{a} = (2; 2; -1)$ ,  $\mathbf{b} = (1; -2; 2)$ .

△ По формуле (1) находим:

$$\cos \varphi = \frac{2 - 4 - 2}{\sqrt{4 + 4 + 1} \sqrt{1 + 4 + 4}} = -\frac{4}{9}. \quad \blacktriangle$$

### Вопросы для контроля

1. Что называется проекцией вектора на ось?
2. Чему равна проекция суммы двух векторов?
3. Чему равна проекция произведения вектора на число?
4. Что называется скалярным произведением двух векторов?
5. Какими свойствами обладает скалярное произведение?
6. Чему равно скалярное произведение векторов, заданных своими координатами?
7. Как вычислить косинус угла между векторами, если известны их координаты?

## Упражнения

5.9. Вычислите:

- 1)  $i \cdot (j + k) + j \cdot (3i - k) + k \cdot (i + 2j)$ ;
- 2)  $i \cdot (i + j + k) + j \cdot (i + j + k) + k \cdot (i + j + k)$ .

5.10. Вычислите  $a \cdot b + b \cdot c + a \cdot c$ , если  $a + b + c = 0$  и  $|a| = |b| = |c| = 1$ .

5.11. Дан вектор  $a = (1; 2; -3)$ . Известно, что абсцисса перпендикулярного ему вектора  $b$  равна 3, а ордината равна 6; требуется найти аппликату вектора  $b$ .

5.12. Найдите значение  $\alpha$ , при котором следующие векторы взаимно перпендикулярны:

- 1)  $a = \alpha i + 3j + 4k$  и  $b = 4i + \alpha j - 7k$ ;
- 2)  $a = (\alpha; -3; 2)$  и  $b = (1; 2; -\alpha)$ ;
- 3)  $a = (0; -2; 7)$  и  $b = (\alpha; 14; 4)$ .

5.13. Найдите значения  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых векторы  $a = (3; -1; \alpha)$  и  $b = (2; \beta; 1)$  взаимно перпендикулярны, если  $|b| = 3$ .

5.14. В плоскости  $Oxy$  найдите вектор  $b$ , перпендикулярный вектору  $a = 3i - 4j + 5k$ , если  $|b| = |a|$ .

5.15. Даны два вектора:  $a = (3; -1; 5)$  и  $b = (1; 2; -3)$ . Найдите вектор  $x$ , перпендикулярный оси  $Oz$  и удовлетворяющий условиям  $x \cdot a = 9$ ,  $x \cdot b = 4$ .

5.16. Найдите вектор  $b$ , коллинеарный вектору  $a$  и удовлетворяющий данному условию:

- 1)  $a = 2i + j - k$ ,  $b \cdot a = 3$ ;
- 2)  $a = (-1; 2; 2)$ ,  $b \cdot a = -2$ .

5.17. Найдите вектор  $b$ , длина которого равна 50, коллинеарный вектору  $a$  и образующий острый угол с заданной осью:

- 1)  $a = 2i - j - 6k$ , ось  $Ox$ ;
- 2)  $a = (6; -8; -7,5)$ , ось  $Oz$ .

5.18. Даны три вектора:  $a = (2; -1; 3)$ ,  $b = (1; -3; 2)$ ,  $c = (3; 2; -4)$ . Найдите вектор  $x$ , удовлетворяющий условиям  $x \cdot a = -5$ ,  $x \cdot b = -11$ ,  $x \cdot c = 20$ .

5.19. Найдите косинусы углов между вектором  $a = (3; -4; 12)$  и осями координат.

5.20. Найдите угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах  $a = 2i + j$  и  $b = -j + 2k$ .

5.21. Определите угол между векторами:

- 1)  $i$  и  $j + k$ ; 2)  $j$  и  $i - k$ ; 3)  $k$  и  $2j - 3k$ .

5.22. В треугольнике с вершинами  $A(5; 0; 0)$ ,  $B(1; 1; 1)$  и  $C(3; -1; 2)$  найдите величины углов.

5.23. Даны три последовательные вершины параллелограмма:  $A(-3; -2; 0)$ ,  $B(3; -3; 1)$  и  $C(5; 0; 2)$ . Найдите четвертую вершину  $D$  и угол между векторами  $\overrightarrow{AC}$  и  $\overrightarrow{BD}$ .

5.24. Дан треугольник с вершинами в точках  $A(3; -2; 1)$ ,  $B(3; 0; 2)$  и  $C(1; 2; 5)$ . Вычислите угол между медианой  $BD$  и стороной  $AC$ .

5.25. Дан четырехугольник с вершинами в точках  $A(2; -3; 1)$ ,  $B(1; 4; 0)$ ,  $C(-4; 1; 1)$  и  $D(-5; -5; 3)$ . Найдите угол между диагоналями  $AC$  и  $BD$ .

5.26. Дан треугольник с вершинами в точках  $A(-1; 4; 1)$ ,  $B(3; 4; -2)$  и  $C(5; 2; -1)$ . Вычислите косинус угла при вершине  $B$ .

5.27. Вычислите работу, совершаемую равнодействующей двух сил  $F_1(5; -1; 3)$  и  $F_2(-3; -2; 4)$  при прямолинейном перемещении материальной точки из положения  $B(10; 8; -2)$  в положение  $C(9; 4; 1)$ .

## § 23. Векторное и смешанное произведения векторов

1. Векторное произведение двух векторов и его свойства. В физике момент силы  $F$  относительно точки  $O$  изображают вектором  $\vec{OM}$ , перпендикулярным плоскости, в которой лежат точка  $O$  и вектор  $F$  (рис. 178). Длину вектора  $\vec{OM}$  определяют как произведение длины вектора  $F$

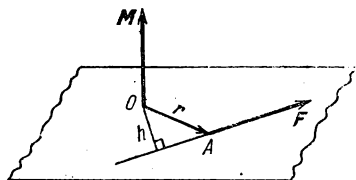


Рис. 178

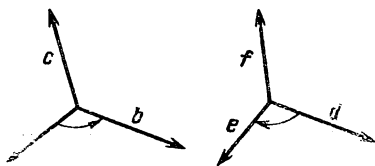


Рис. 179

на плечо  $h$  ( $h$ —расстояние от точки  $O$  до прямой, на которой изображен вектор силы  $F$ ), т. е.  $|\vec{OM}| = |F| \cdot h$  или

$$|\vec{OM}| = |F| \cdot |r| \cdot \sin \angle(F; r),$$

где  $r = \vec{OA}$ —радиус-вектор точки приложения силы  $F$ .

Вектор  $\vec{OM}$  называют векторным произведением вектора  $r$  на вектор  $F$ . Прежде чем дать определение векторного произведения двух произвольных векторов  $a$  и  $b$ , введем понятие правой и левой троек векторов.

Три некопланарных вектора  $a$ ,  $b$  и  $c$ , взятых в указанном порядке, образуют *правую* тройку, если после приведения их к общему началу вектор  $c$  расположен по ту сторону от плоскости, содержащей векторы  $a$  и  $b$ , откуда кратчайший поворот от  $a$  к  $b$  возможно совершать против часовой стрелки. В противном случае тройка векторов называется *левой*. Векторы  $a, b, c$ , изображенные на рис. 179, образуют правую тройку, а векторы  $d, e, f$ —левую.

Векторы  $r, F, \vec{OM}$  на рис. 178 образуют правую тройку.

*Векторным произведением* вектора  $a$  на неколлинеарный ему вектор  $b$  называется такой третий вектор  $c$ , который удовлетворяет следующим трем условиям:

- 1) длина вектора  $|c| = |a| \cdot |b| \cdot \sin \angle(a; b)$ ;
- 2) вектор  $c$  перпендикулярен векторам-множителям  $a$  и  $b$ :  $c \perp a$  и  $c \perp b$ ;
- 3) три вектора  $a, b, c$  в указанном порядке образуют правую тройку.

Векторным произведением коллинеарных векторов считается нулевой вектор.

Векторное произведение вектора  $a$  на вектор  $b$  обозначается символом  $[a; b]$ . Условия 1) и 2) определяют вектор  $c = [a; b]$  с точностью до двух взаимно противоположных направлений. Условие 3) задает одно из этих двух направлений. Условие 1) можно сформулировать чисто геометрически: длина вектора  $c$  содержит столько единиц длины, сколько одноименных квадратных единиц содержит площадь параллелограмма, построенного на векторах-множителях (рис. 180).

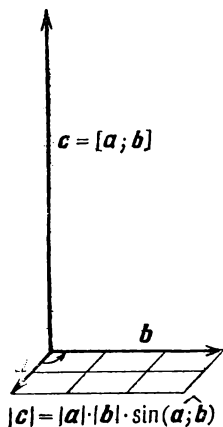


Рис. 180

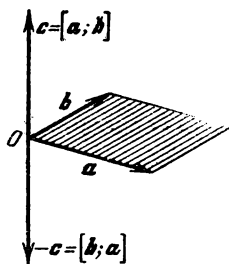


Рис. 181

Из условия 1) видно, что  $[a; b] \neq 0$ , если  $a$  и  $b$  неколлинеарны. С другой стороны, векторное произведение коллинеарных векторов по определению равно нулевому вектору. Таким образом, равенство

$$[a; b] = 0$$

является необходимым и достаточным условием коллинеарности векторов  $a$  и  $b$ . Рассмотрим некоторые свойства векторного произведения.

1. При перемене порядка сомножителей векторное произведение сохраняет длину, но меняет свое направление на противоположное:

$$[a; b] = -[b; a].$$

□ В самом деле, согласно определению векторного произведения,

$$|[a; b]| = |a| \cdot |b| \cdot \sin \angle(a; b),$$

$$|[b; a]| = |b| \cdot |a| \cdot \sin \angle(b; a),$$

а так как  $\angle(a; b) = \angle(b; a)$ , то

$$|[a; b]| = |[b; a]|.$$

Векторы  $[a; b]$  и  $[b; a]$  перпендикулярны плоскости, определяемой векторами-множителями  $a$  и  $b$ . Но так как векторы  $a, b$  и  $[a; b]$  (а также векторы  $b, a$  и  $[b; a]$ ) образуют правые тройки, то векторы  $[a; b]$  и  $[b; a]$  должны быть противоположно направленными (рис. 181). ■

2. Свойство сочетательности векторного произведения относительно скалярного множителя:

$$[ma; b] = [a; mb] = m[a; b].$$

3. Свойство распределительности векторного произведения выражается равенством

$$[a + b; c] = [a; c] + [b; c].$$

Свойства 2 и 3 векторного произведения примем без доказательства.

Задача 1. Найти длину вектора  $[3a - b; a - 2b]$ , если  $a \perp b$ ,  $|a| = 3$ ,  $|b| = 2$ .

△ В силу свойств 2 и 3 векторного произведения

$$[3a - b; a - 2b] = 3[a; a] - [b; a] - 6[a; b] + 2[b; b].$$

Но  $[a; a] = 0$  и  $[b; b] = 0$ , так как каждый вектор коллинеарен сам себе, а векторным произведением коллинеарных векторов является нулевой вектор. Далее, согласно свойству 1,

$$[b; a] = -[a; b],$$

и поэтому

$$[3a - b; a - 2b] = -5[a; b].$$

Следовательно,

$$|[3a - b; a - 2b]| = |-5[a; b]| = 5|a| \cdot |b| \cdot \sin 90^\circ = 5 \cdot 3 \cdot 2 = 30. \blacktriangle$$

Задача 2. Найти и изобразить векторы  $[a; b]$  и  $[b; a]$ , если  $a = 3i$ ,  $b = 2i + 2k$  ( $i, j, k$  — единичные взаимно перпендикулярные векторы, образующие правую тройку).

$\Delta$  Так как  $[i; i] = 0$  и  $[i; k] = -j$ , то

$$[a; b] = [3i; 2i + 2k] = 6[i; i] + 6[i; k] = -6j.$$

Вектор  $[a; b] = -6j$  на рис. 182 изображается направленным отрезком  $\overrightarrow{OL}$ , вектор  $[b; a] = 6j$  — направленным отрезком  $\overrightarrow{OP}$ . ▲

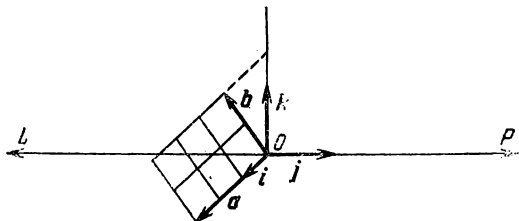


Рис. 182

**2. Векторное произведение двух векторов, заданных своими координатами.** Найдем выражение для векторного произведения двух векторов через прямоугольные декартовы координаты этих векторов.

Пусть векторы  $\mathbf{a} = (x_1; y_1; z_1)$  и  $\mathbf{b} = (x_2; y_2; z_2)$  заданы своими координатами в прямоугольной декартовой системе координат  $O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ , причем тройка  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  является правой (это для определенности всегда будет предполагаться и в дальнейшем).

Разложим  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  по базисным векторам:

$$\mathbf{a} = x_1 \mathbf{i} + y_1 \mathbf{j} + z_1 \mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = x_2 \mathbf{i} + y_2 \mathbf{j} + z_2 \mathbf{k}.$$

Используя свойства векторного произведения, получаем

$$\begin{aligned} [\mathbf{a}; \mathbf{b}] &= [x_1 \mathbf{i} + y_1 \mathbf{j} + z_1 \mathbf{k}; x_2 \mathbf{i} + y_2 \mathbf{j} + z_2 \mathbf{k}] = \\ &= x_1 x_2 [\mathbf{i}; \mathbf{i}] + x_1 y_2 [\mathbf{i}; \mathbf{j}] + x_1 z_2 [\mathbf{i}; \mathbf{k}] + \\ &+ y_1 x_2 [\mathbf{j}; \mathbf{i}] + y_1 y_2 [\mathbf{j}; \mathbf{j}] + y_1 z_2 [\mathbf{j}; \mathbf{k}] + \\ &+ z_1 x_2 [\mathbf{k}; \mathbf{i}] + z_1 y_2 [\mathbf{k}; \mathbf{j}] + z_1 z_2 [\mathbf{k}; \mathbf{k}]. \quad (1) \end{aligned}$$

По определению векторного произведения находим

$$\begin{array}{lll} [i; i]=0, & [i; j]=k, & [i; k]=-j, \\ [j; i]=-k, & [j; j]=0, & [j; k]=i, \\ [k; i]=j, & [k; j]=-i, & [k; k]=0. \end{array}$$

Учитывая эти равенства, формулу (1) можно записать так:

$$[a; b] = x_1 y_2 \mathbf{k} - x_1 z_2 \mathbf{j} - y_1 x_2 \mathbf{k} + y_1 z_2 \mathbf{i} + z_1 x_2 \mathbf{j} - z_1 y_2 \mathbf{i}$$

или

$$[a; b] = (y_1 z_2 - z_1 y_2) i + (z_1 x_2 - z_2 x_1) j + (x_1 y_2 - y_1 x_2) k. \quad (2)$$

Формула (2) дает выражение для векторного произведения двух векторов, заданных своими координатами.

Полученная формула громоздка и запоминается с трудом. Используя обозначения определителей (Алгебра и начала анализа, ч. 1, § 11, 12), можно записать ее в другом более удобном для запоминания виде:

$$[a; b] = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} k. \quad (3)$$

Обычно формулу (3) записывают еще короче:

$$[a; b] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \quad (4)$$

считая, что правая часть формулы (3) формально получена из правой части формулы (4) по правилу разложения определителя по первой строке.

Отметим еще, что в частном случае, когда векторы  $a$  и  $b$  лежат в плоскости векторов  $i$  и  $j$ , формула (4) упрощается:

$$[a; b] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & 0 \\ x_2 & y_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} k. \quad (5)$$

**Задача 1.** Найти векторное произведение  $[a; b]$  векторов  $a = (2; 3; -4)$  и  $b = (5; 1; 2)$ .

△ Непосредственной подстановкой координат векторов  $a$  и  $b$  в формулу (4) получаем

$$[a; b] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & -4 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

Следовательно,  $[a; b] = 10i - 24j - 13k$ . ▲

**Задача 2.** Найти длину вектора  $[a; b]$ , если  $a = (2; 3)$  и  $b = (-1; 7)$ .

△ Применяем формулу (5):

$$[a; b] = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} k = 17k.$$

Следовательно,  $|[a; b]| = |17k| = 17$ . ▲

**3. Смешанное произведение трех векторов и его свойства.** Смешанным произведением трех векторов  $a, b, c$



называется число, равное скалярному произведению вектора  $[a; b]$  на вектор  $c$ .

Смешанное произведение векторов  $a, b$  и  $c$  обозначается  $(a; b; c)$ . Следовательно,

$$(a; b; c) = |[a; b]| \cdot |c| \cdot \cos \psi, \quad (1)$$

где  $\psi$  — угол между векторами  $[a; b]$  и  $c$ .

**Теорема 1.** *Модуль смешанного произведения трех некомпланарных векторов  $a, b$  и  $c$  равен объему параллелепипеда, построенного на векторах-множителях.*

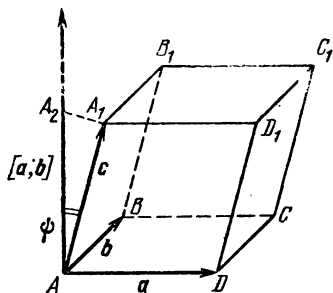


Рис. 183

□ Как известно (п. 1), площадь  $S$  параллелограмма, построенного на векторах  $a$  и  $b$ , равна  $|[a; b]|$ . Поэтому из формулы (1) следует, что

$$(a; b; c) = S \cdot |c| \cdot \cos \psi.$$

С другой стороны, объем  $V$  параллелепипеда, построенного на векторах  $a, b, c$  (рис. 183), равен произведению

площади его основания  $S$  на высоту  $h$ , причем  $h = AA_2$ , где  $A_2$  — проекция вершины  $A_1$  на ось, определяемую вектором  $[a; b]$ . Так как  $AA_2 = |c| \cdot |\cos \psi|$ , то

$$V = S \cdot h = S \cdot |c| \cdot |\cos \psi| = |(a; b; c)|. \blacksquare$$

Из формулы (1) видно, что если смешанное произведение трех векторов не равно нулю, то его знак совпадает со знаком  $\cos \psi$ . Поэтому смешанное произведение положительно, если вектор  $c$  направлен в ту же сторону от плоскости векторов  $a$  и  $b$ , что и вектор  $[a; b]$ , т. е. если тройка векторов  $a, b, c$  правая. Смешанное произведение отрицательно, когда вектор  $c$  и вектор  $[a; b]$  направлены в противоположные стороны от плоскости векторов  $a$  и  $b$ , т. е. когда тройка векторов  $a, b, c$  левая. Итак, если векторы  $a, b, c$  образуют правую тройку, то  $(a; b; c) > 0$ , если левую, то  $(a; b; c) < 0$ .

**Теорема 2.** *Смешанное произведение трех векторов равно нулю тогда и только тогда, когда векторы компланарны.*

□ **Необходимость.** Пусть  $(a; b; c) = 0$ . Предположим, что векторы  $a, b$  и  $c$  некомпланарны. Построим на этих векторах параллелепипед. Его объем  $V > 0$ , но

по теореме 1  $|(a; b; c)| = V$ , что противоречит предположению.

**Достаточность.** Пусть векторы  $a$ ,  $b$  и  $c$  компланарны. Тогда вектор  $[a; b]$  перпендикулярен вектору  $c$ , но скалярное произведение перпендикулярных векторов равно нулю, т. е.  $[a; b] \cdot c = (a; b; c) = 0$ . ■

Рассмотрим некоторые свойства смешанного произведения.

1. Для любых векторов  $a$ ,  $b$  и  $c$  справедливы равенства

$$(a; b; c) = (b; c; a) = (c; a; b),$$

т. е. при циклической перестановке множителей смешанное произведение не изменяется.

□ Достаточно доказать первое равенство, так как второе следует из первого.

Если векторы  $a$ ,  $b$  и  $c$  компланарны, то равенство  $(a; b; c) = (b; c; a)$  очевидно; обе части равенства равны нулю.

Пусть векторы  $a$ ,  $b$  и  $c$  некомпланарны. Тогда в силу теоремы 1

$$|(a; b; c)| = V \quad \text{и} \quad |(b; c; a)| = V,$$

где  $V$  — объем параллелепипеда, построенного на данных трех векторах. Но тройки векторов  $a, b, c$  и  $b, c, a$  являются одновременно либо правыми, либо левыми, поэтому знаки чисел  $(a; b; c)$  и  $(b; c; a)$  совпадают. ■

2. Для любых векторов  $a$ ,  $b$  и  $c$  справедливы равенства

$$(a; b; c) = -(b; a; c) = -(a; c; b),$$

т. е. при перестановке двух соседних множителей знак смешанного произведения изменяется на противоположный.

□ Первое из равенств следует из свойства векторного произведения (п. 1):

$$(a; b; c) = [a; b] \cdot c = -[b; a] \cdot c = -(b; a; c).$$

Второе равенство очевидно в силу свойства 1 смешанного произведения. ■

**Задача 1.** Вычислить  $(a; b; c)$ , если векторы  $a$ ,  $b$ ,  $c$  образуют правую тройку,  $a \perp c$ ,  $b \perp c$ ,  $\angle(a; b) = 150^\circ$ ,  $|a| = |b| = 4$ ,  $|c| = 3$ .

△ По определению

$$\begin{aligned} (a; b; c) &= [a; b] \cdot c = |a| \cdot |b| \cdot \sin 150^\circ \cdot |c| \cdot \cos 0^\circ = \\ &= 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 24. \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

**Задача 2.** Вычислить  $(i + j; j - 2i; k)$ , где  $i, j, k$  — взаимно перпендикулярные единичные векторы, образующие правую тройку.

$$\begin{aligned}\Delta (i + j; j - 2i; k) &= [i + j; j - 2i] \cdot k = \\ &= ([i; j] - 2[i; i] + [j; j] - 2[j; i]) \cdot k = \\ &= 3[i; j] \cdot k = 3(i; j; k) = 3. \blacktriangle\end{aligned}$$

**4. Смешанное произведение трех векторов, заданных своими координатами.** Пусть векторы  $a, b$  и  $c$  заданы своими прямоугольными декартовыми координатами

$$a = (x_1; y_1; z_1), \quad b = (x_2; y_2; z_2), \quad c = (x_3; y_3; z_3).$$

Для вычисления смешанного произведения  $(a; b; c)$  найдем сначала векторное произведение векторов  $a$  и  $b$  (п. 2, формула (4)):

$$[a; b] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} k.$$

Умножив теперь скалярно вектор  $[a; b]$  на вектор  $c = x_3 i + y_3 j + z_3 k$ , получим

$$[a; b] \cdot c = x_3 \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - y_3 \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + z_3 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Следовательно,

$$(a; b; c) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}, \quad (1)$$

т. е. смешанное произведение трех векторов равно определителю третьего порядка, в первой строке которого стоят координаты первого вектора, во второй — второго и в третьей — координаты третьего вектора.

Теперь теорему 2 из предыдущего пункта можно сформулировать следующим образом.

Для того чтобы векторы  $a = (x_1; y_1; z_1)$ ,  $b = (x_2; y_2; z_2)$  и  $c = (x_3; y_3; z_3)$  были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (2)$$

**Задача 1.** Установить, компланарны ли векторы  $a = (4; 2; 1)$ ,  $b = (8; 6; 8)$  и  $c = (5; 2; 1)$ .

△ Воспользуемся условием (2):

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 8 & 6 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} = 5 \cdot 0 - 2 \cdot 4 + 8 = 0.$$

Следовательно, векторы компланарны. ▲

Задача 2. Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах  $\mathbf{a} = (4; -1; 1)$ ,  $\mathbf{b} = (8; 3; 3)$  и  $\mathbf{c} = (5; 1; 1)$ .

△ Найдем смешанное произведение данных векторов:

$$(\mathbf{a}; \mathbf{b}; \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 8 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 8 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -14.$$

Теперь по теореме 1 п. 3 получаем

$$V = |(\mathbf{a}; \mathbf{b}; \mathbf{c})| = |-14| = 14 \text{ (куб. ед.)}. \quad \blacktriangle$$

### 5. Решение задач векторным методом.

Задача 1. В прямоугольной декартовой системе координат заданы точки  $M_1(5; 0; 1)$  и  $M_2(4; 1; -2)$ . При каких значениях  $x$  и  $y$  точка  $M_3(x; y; 4)$  принадлежит прямой  $M_1M_2$ ?

△ Точки  $M_1, M_2, M_3$  принадлежат одной прямой тогда и только тогда, когда векторы  $\overrightarrow{M_1M_2}$  и  $\overrightarrow{M_1M_3}$  коллинеарны. В п. 1 было доказано, что условие  $[\overrightarrow{M_1M_2}; \overrightarrow{M_1M_3}] = 0$  является необходимым и достаточным условием коллинеарности двух векторов. Находим координаты векторов

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (-1; 1; -3), \quad \overrightarrow{M_1M_3} = (x-5; y; 3)$$

и их векторное произведение

$$\begin{aligned} [\overrightarrow{M_1M_2}; \overrightarrow{M_1M_3}] &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 1 & -3 \\ x-5 & y & 3 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ y & 3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ x-5 & 3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ x-5 & y \end{vmatrix} \mathbf{k} = \\ &= (3+3y)\mathbf{i} + (18-3x)\mathbf{j} + (5-x-y)\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Полученный вектор равен нулевому вектору, если

$$\begin{cases} 3+3y = 0, \\ 18-3x = 0, \\ 5-x-y = 0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что  $x=6$ ,  $y=-1$ . ▲

Таким образом, чтобы убедиться в принадлежности точек  $M_1, M_2, M_3$  одной прямой, достаточно доказать, что  $[\overrightarrow{M_1M_2}; \overrightarrow{M_1M_3}] = 0$ .

**Задача 2.** Вычислить площадь треугольника, вершины которого заданы своими координатами в прямоугольной системе координат:  $A(1; 2), B(4; -5), C(5; 3)$ .

△ Так как площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{AC}$ , равна  $|\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}|$ , то площадь треугольника  $ABC$  вычисляется по формуле

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}|.$$

Теперь, согласно формуле (5) п. 2, получаем

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} k & -7 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |31 k| = \frac{31}{2} \text{ (кв. ед.)}. \blacktriangle$$

Итак, для вычисления площади треугольника можно найти векторное произведение двух векторов, построенных на любых двух его сторонах, а затем вычислить половину его длины.

**Задача 3.** Вычислить площадь параллелограмма, три последовательные вершины которого  $A(1; 2; 0), B(3; 0; -3), C(5; 2; 6)$  заданы своими координатами в прямоугольной системе.

△ Так как  $S = |\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}|$ , а согласно формуле (4) из п. 2

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -2 & -3 \\ 2 & 2 & 9 \end{vmatrix} = -12i - 24j + 8k,$$

то

$$S = \sqrt{12^2 + 24^2 + 8^2} = \sqrt{784} = 28 \text{ (кв. ед.)}. \blacktriangle$$

Таким образом, для вычисления площади параллелограмма нужно найти векторное произведение двух векторов, построенных на любых двух смежных его сторонах, а затем вычислить его длину.

**Задача 4.** Сила  $F = (3; 2; 1)$  приложена к точке  $A(2; 0; 1)$ . Определить момент  $M$  этой силы относительно точки  $O(0; 0; 0)$ .

$$\Delta M = [\overrightarrow{OA}, F] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2i + j + 4k. \blacktriangle$$

Итак, для определения момента силы  $\mathbf{F}$ , приложенной к точке  $A$  относительно точки  $O$ , достаточно вычислить векторное произведение вектора  $\vec{OA}$  на вектор  $\mathbf{F}$ .

Задача 5. Доказать, что четыре точки:  $M_0(1; 2; -1)$ ,  $M_1(0; 1; 5)$ ,  $M_2(-1; 2; 1)$ ,  $M_3(2; 1; 3)$  — лежат в одной плоскости.

△ Четыре точки лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда векторы  $\vec{M_0M_1}$ ,  $\vec{M_0M_2}$ ,  $\vec{M_0M_3}$  компланарны. Поэтому их смешанное произведение должно быть равно нулю.

Так как  $\vec{M_0M_1} = (-1; -1; 6)$ ,  $\vec{M_0M_2} = (-2; 0; 2)$  и  $\vec{M_0M_3} = (1; -1; 4)$ , то

$$\begin{aligned} (\vec{M_0M_1}; \vec{M_0M_2}; \vec{M_0M_3}) &= \begin{vmatrix} -1 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \\ &= -1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 6 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = \\ &= -2 - 10 + 12 = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, точки  $M_0$ ,  $M_1$ ,  $M_2$  и  $M_3$  лежат в одной плоскости. ▲

Итак, для того чтобы установить принадлежность четырех точек  $M_0(x_0; y_0; z_0)$ ,  $M_1(x_1; y_1; z_1)$ ,  $M_2(x_2; y_2; z_2)$ ,  $M_3(x_3; y_3; z_3)$  одной плоскости, достаточно убедиться в том, что определитель

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \\ x_3 - x_0 & y_3 - y_0 & z_3 - z_0 \end{vmatrix}$$

равен нулю.

Задача 6. Вычислить объем пирамиды, вершины которой находятся в точках  $A(1; 2; -1)$ ,  $B(0; 1; 5)$ ,  $C(-1; 2; 1)$ ,  $D(1; 2; 3)$ .

△ Объем пирамиды  $ABCD$  в шесть раз меньше объема параллелепипеда с ребрами  $AB$ ,  $AC$  и  $AD$ . Поэтому

$$V = \frac{1}{6} |(\vec{AB}; \vec{AC}; \vec{AD})|.$$

Вычислим смешанное произведение векторов  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AC}$  и  $\vec{AD}$  по формуле (1) п. 4:

$$(\vec{AB}; \vec{AC}; \vec{AD}) = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -8.$$

Следовательно,  $V = \frac{4}{3}$  (куб. ед.).  $\blacktriangle$

Таким образом, объем  $V$  пирамиды с вершинами в точках  $A(x_1; y_1; z_1)$ ,  $B(x_2; y_2; z_2)$ ,  $C(x_3; y_3; z_3)$ ,  $D(x_4; y_4; z_4)$  можно вычислить по формуле

$$V = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} \right|.$$

### Вопросы для контроля

1. Какая тройка векторов называется правой? левой?
2. Что называется векторным произведением векторов?
3. Какой геометрический смысл имеет длина векторного произведения?
4. Обладает ли векторное произведение свойством перестановочности?
5. Можно ли выносить числовой множитель за знак векторного произведения?
6. Справедливо ли равенство  $[a; b+c] = [a; b] + [a; c]$ ?
7. Напишите формулу для векторного произведения векторов, заданных своими координатами.
8. Что называется смешанным произведением трех векторов?
9. Чему равен модуль смешанного произведения?
10. Сформулируйте необходимое и достаточное условие компланарности трех векторов.
11. Какими свойствами обладает смешанное произведение?
12. Чему равно смешанное произведение векторов, заданных своими координатами?

### Упражнения

5.28. Выясните, правой или левой является тройка векторов  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , если:

- 1)  $a = -i - j$ ,  $b = j$ ,  $c = k$ ;
- 2)  $a = i - j$ ,  $b = j$ ,  $c = i + j$ ;
- 3)  $a = i - j$ ,  $b = i + j$ ,  $c = k$

( $i$ ,  $j$ ,  $k$  образуют правую тройку).

- 5.29. Найдите вектор  $[a; b]$  и изобразите его, если:
- 1)  $a = 2i, b = 3j$ ;
  - 2)  $a = 3i - 2k, b = 4k$ ;
  - 3)  $a = i + j + k, b = 2i - 3j + 4k$ .
- 5.30. Найдите площадь параллелограмма, построенного на векторах  $a = (3; 4)$  и  $b = (4; -3)$ .
- 5.31. Даны векторы  $a = (1; -2; 3), b = (2; 2; -1), c = (0; 1; -2), d = (2; -1; 0)$ . Вычислите:
- 1)  $[a; b]$ ; 2)  $[a; c]$ ; 3)  $[b; c]$ ; 4)  $[a; d]$ ;
  - 5)  $[(a+b); c]$ ; 6)  $[(a-b); c]$ ; 7)  $[(a+b); (d-c)]$ ;
  - 8)  $[(a+2d); c]$ ; 9)  $[(2a-3b); (c+d)]$ ; 10)  $[(a-b); (3c+2d)]$ .
- 5.32. Найдите площадь треугольника с вершинами в точках  $A(0; 2; 6), B(4; 0; 0)$  и  $C(8; -2; 0)$ .
- 5.33. Даны вершины параллелограмма:  $A(1; -2), B(-2; 2), C(4; 10)$  и  $D(7; 6)$ . Вычислите его площадь и высоты.
- 5.34. Сила  $F = 2i - 3j + 4k$  приложена к точке  $M(1; 5; -2)$ . Найдите величину момента силы  $F$  относительно начала координат.
- 5.35. Векторы  $r_1, r_2, r_3$ , образующие правую тройку, взаимно перпендикулярны. Зная, что  $|r_1| = 7, |r_2| = 5, |r_3| = 6$ , вычислите  $(r_1; r_2; r_3)$ .
- 5.36. Докажите, что  $(r_1 + r_2; r_2 + r_3; r_3 + r_1) = 2(r_1; r_2; r_3)$ .
- 5.37. Докажите, что векторы  $r_1, r_2, r_3$ , удовлетворяющие условию  $[r_1; r_2] + [r_2; r_3] + [r_3; r_1] = 0$ , компланарны.
- 5.38. Вычислите объем параллелепипеда, построенного на векторах  $r_1 = a + b + c, r_2 = a - b + c$  и  $r_3 = a - b - c$ .
- 5.39. Покажите, что объем параллелепипеда, построенного на диагоналях граней данного параллелепипеда, имеющих общую вершину, равен удвоенному объему данного параллелепипеда.
- 5.40. Найдите смешанное произведение  $(a; b; c)$  векторов  $a = (0; 3; -1), b = (5; 0; 0), c = (7; -2; 4)$ .
- 5.41. Установите, компланарны ли векторы  $a = (8; 5; -13), b = (-4; 2; 8), c = (4; 7; -4)$ ; если векторы некомпланарны, то какую они образуют тройку: правую или левую?
- 5.42. Установите, компланарны ли векторы  $a = (-2; -1; -3), b = (-1; 4; 6), c = (1; 5; 9)$ .
- 5.43. Найдите объем параллелепипеда, построенного на векторах  $a = (1; 2; 3), b = (-1; 3; 4), c = (2; 5; 2)$ .
- 5.44. Сила  $F = 3i + k$  приложена к точке  $A(2; 1; 4)$ . Найдите момент и величину момента этой силы относительно точки  $O(2; -1; 3)$ .
- 5.45. К материальной точке приложены две силы  $F_1$  и  $F_2$ , причем  $|F_1| + |F_2| = 4\text{Н}$  и  $\angle(F_1; F_2) = 120^\circ$ . Найдите наименьшее значение величины равнодействующей этих сил.
- 5.46. Определите, лежат ли в одной плоскости следующие четыре точки:
- 1)  $M_1(5; 2; -2), M_2(6; -3; 1), M_3(0; 4; -3), M_4(2; 0; -4)$ ;
  - 2)  $M_1(3; 5; 1), M_2(2; 4; 7), M_3(1; 5; 3), M_4(4; 4; 5)$ .
- 5.47. Вершины пирамиды находятся в точках  $A(2; 1; -1), B(3; 0; 1), C(2; -1; 3)$  и  $D(0; -7; 0)$ . Найдите высоту пирамиды, опущенную из вершины  $D$ .



УРАВНЕНИЯ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ  
В ПРОСТРАНСТВЕ

## § 24. Уравнения плоскостей

1. **Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору.** Через любую точку пространства проходит единственная плоскость, перпендикулярная данному ненулевому вектору. Любой ненулевой вектор, перпендикулярный данной плоскости, называется *нормальным вектором* этой плоскости. Выведем уравнение плоскости  $p$ , проходящей через точку  $M_0$  перпендикулярно вектору  $\mathbf{n} \neq 0$  (рис. 184).

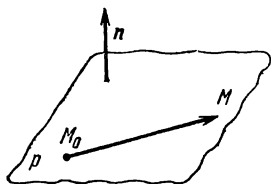


Рис. 184

Очевидно, что точка  $M$  пространства принадлежит плоскости  $p$  тогда и только тогда, когда вектор  $\overrightarrow{M_0M}$  ортогонален вектору  $\mathbf{n}$ . Как известно, необходимым и достаточным условием ортогональности двух векторов является равенство нулю их скалярного произведения. Поэтому уравнение плоскости, проходящей через точку  $M_0$  перпендикулярно вектору, может быть записано в виде

$$\overrightarrow{M_0M} \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (1)$$

Пусть вектор  $\mathbf{n}$  и точки  $M_0$ ,  $M$  заданы своими координатами в некоторой прямоугольной декартовой системе координат

$$\mathbf{n} = (A; B; C), \quad M_0(x_0; y_0; z_0), \quad M(x; y; z).$$

Тогда вектор  $\overrightarrow{M_0M}$  имеет координаты  $x - x_0$ ,  $y - y_0$ ,  $z - z_0$ , а уравнение (1) в координатах записывается следующим образом

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (2)$$

Это уравнение называется *уравнением плоскости, проходящей через точку  $(x_0; y_0; z_0)$  перпендикулярно вектору  $(A; B; C)$* .

**Задача 1.** Найти уравнение плоскости, проходящей через точку  $M_0(-3; 4; 7)$  перпендикулярно вектору  $\vec{n} = (1; -2; 6)$ .

△ В данном случае  $x_0 = -3$ ,  $y_0 = 4$ ,  $z_0 = 7$ ;  $A = 1$ ,  $B = -2$ ,  $C = 6$ . Подставив эти значения в уравнение (2), получим искомое уравнение

$$1(x + 3) - 2(y - 4) + 6(z - 7) = 0,$$

или

$$x - 2y + 6z - 31 = 0. \blacktriangle$$

**Задача 2.** Даны точки  $M_1(2; -1; 3)$  и  $M_2(4; 5; 0)$ . Написать уравнение плоскости, проходящей через точку  $M_2$  перпендикулярно вектору  $\overrightarrow{M_1M_2}$ .

△ За нормальный вектор плоскости можно взять вектор  $\vec{n} = \overrightarrow{M_1M_2} = (2; 6; -3)$ . После подстановки координат нормального вектора и координат точки  $M_0 = M_2(4; 5; 0)$  в уравнение (2) получим

$$2(x - 4) + 6(y - 5) - 3z = 0$$

или

$$2x + 6y - 3z - 38 = 0. \blacktriangle$$

**Задача 3.** В треугольнике с вершинами в точках  $A_1(-5; 2; 7)$ ,  $A_2(5; 0; 6)$ ,  $A_3(0; -1; 2)$  проведена медиана  $A_1M_0$ . Найти уравнение плоскости, проходящей через точку  $M_0$  перпендикулярно медиане  $A_1M_0$ .

△ За нормальный вектор плоскости можно принять вектор  $\vec{n} = \overrightarrow{A_1M_0}$ . Определим его координаты. Точка  $M_0$  — середина отрезка  $A_2A_3$ , поэтому если  $(x_0; y_0; z_0)$  ее координаты, то

$$x_0 = \frac{5+0}{2} = \frac{5}{2}, \quad y_0 = \frac{0-1}{2} = -\frac{1}{2}, \quad z_0 = \frac{6+2}{2} = 4.$$

Для координат нормального вектора  $\vec{n} = (A; B; C)$  имеем:  $A = \frac{5}{2} + 5 = \frac{15}{2}$ ,  $B = -\frac{1}{2} - 2 = -\frac{5}{2}$ ,  $C = 4 - 7 = -3$ . Уравнение (2) имеет в данном случае вид

$$\frac{15}{2}\left(x - \frac{5}{2}\right) - \frac{5}{2}\left(y + \frac{1}{2}\right) - 3(z - 4) = 0$$

или

$$15x - 5y - 6z - 16 = 0. \blacktriangle$$

**2. Общее уравнение плоскости.** В предыдущем пункте доказано, что плоскость, проходящая через точку  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  перпендикулярно вектору  $\mathbf{n} = (A; B; C)$ , имеет уравнение

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Обозначив число  $-Ax_0 - By_0 - Cz_0$  через  $D$ , получим уравнение

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (1)$$

у которого хотя бы один из коэффициентов  $A$ ,  $B$  или  $C$  отличен от нуля. Такое уравнение называется линейным уравнением с тремя переменными.

Таким образом, *любая плоскость в пространстве может быть задана линейным уравнением с тремя переменными.*

Справедливо и обратное утверждение: *всякое линейное уравнение с тремя переменными определяет плоскость в пространстве.*

В самом деле, пусть, например,  $C \neq 0$ . Тогда уравнение (1) можно переписать следующим образом:

$$A(x - 0) + B(y - 0) + C\left(z + \frac{D}{C}\right) = 0.$$

Как известно, полученное уравнение, а следовательно и уравнение (1), определяет плоскость, проходящую через точку  $M_0\left(0; 0; -\frac{D}{C}\right)$  перпендикулярно вектору  $\mathbf{n} = (A; B; C)$ .

Уравнение (1) называется *общим уравнением плоскости*. Его коэффициенты  $A$ ,  $B$ ,  $C$  являются координатами нормального вектора плоскости.

**Задача.** Найти единичный нормальный вектор плоскости

$$7x + 4y - 4z + 1 = 0.$$

$\Delta$  Вектор  $\mathbf{n} = (7; 4; -4)$  является нормальным вектором данной плоскости. Так как

$$|\mathbf{n}| = \sqrt{49 + 16 + 16} = 9,$$

то вектор  $\mathbf{n}_0 = \left( \frac{1}{9}; \frac{4}{9}; -\frac{4}{9} \right)$  — единичный нормальный вектор данной плоскости. Вектор  $-\mathbf{n}_0$  также будет единичным нормальным вектором данной плоскости. ▲

**3. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку параллельно двум данным векторам.** Выведем уравнение плоскости  $p$ , проходящей через точку  $M_0$  параллельно двум неколлинеарным векторам  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ . На рис. 185 векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  отложены от точки  $M_0$ .

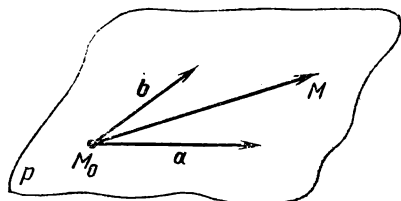


Рис. 185

Точка  $M$  пространства принадлежит плоскости  $p$  тогда и только

тогда, когда векторы  $\overrightarrow{M_0M}$ ,  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  компланарны. А три вектора компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю:

$$(\overrightarrow{M_0M}; \mathbf{a}; \mathbf{b}) = 0. \quad (1)$$

Поэтому уравнение (1) является уравнением плоскости, проходящей через точку  $M_0$  параллельно векторам  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ .

Пусть точки  $M_0$  и  $M$  и векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  заданы своими координатами в некоторой прямоугольной декартовой системе координат:

$$M_0(x_0; y_0; z_0), \quad M(x; y; z), \quad \mathbf{a} = (a_1; a_2; a_3), \quad \mathbf{b} = (b_1; b_2; b_3).$$

Тогда уравнение (1) в координатах записывается следующим образом:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0, \quad (2)$$

так как смешанное произведение трех векторов равно определителю третьего порядка, в строках которого стоят координаты векторов.

Из уравнений (1) и (2) следует, что вектор

$$\mathbf{n} = [\mathbf{a}; \mathbf{b}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

является нормальным для любой плоскости, параллельной векторам  $\mathbf{a} = (a_1; a_2; a_3)$  и  $\mathbf{b} = (b_1; b_2; b_3)$ .

**Задача 1.** Написать уравнение плоскости, проходящей через точку с координатами  $(1; -1; -2)$  параллельно векторам  $(-3; 2; 1)$  и  $(1; 2; 3)$ .

△ Плоскость, проходящая через точку  $M_0(1; -1; -2)$  параллельно векторам  $\mathbf{a}=(-3; 2; 1)$  и  $\mathbf{b}=(1; 2; 3)$ , имеет уравнение

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z+2 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Разложив этот определитель по элементам первой строки, получим

$$(x-1) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - (y+1) \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (z+2) \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$4(x-1) + 10(y+1) - 8(z+2) = 0.$$

Следовательно, плоскость имеет уравнение

$$2x + 5y - 4z - 5 = 0. \blacktriangle$$

Из уравнения (1) видно, что вектор  $\mathbf{n}=[\mathbf{a}; \mathbf{b}]$  является нормальным вектором плоскости, параллельной векторам  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ .

**Задача 2.** Найти нормальный вектор плоскости, параллельной векторам  $\mathbf{a}=(-3; 2; 1)$  и  $\mathbf{b}=(1; 2; 2)$ .

△ Нормальный вектор находим по формуле

$$\mathbf{n}=[\mathbf{a}; \mathbf{b}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \cdot 2 - \mathbf{j} \cdot (-7) + \mathbf{k} \cdot (-8).$$

Следовательно,  $\mathbf{n}=(2; 7; -8)$ .  $\blacktriangle$

**4. Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки.** Как известно, через три точки, не лежащие на одной прямой, проходит, и притом только одна, плоскость. Выведем уравнение плоскости  $p$ , проходящей через три точки  $M_1, M_2, M_3$ , не лежащие на одной прямой (рис. 186).

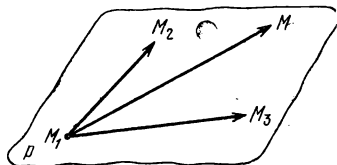


Рис. 186

Точка  $M$  пространства принадлежит плоскости  $p$  тогда

и только тогда, когда векторы  $\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}$  компланарны. Следовательно (см. п. 3), плоскость, проходящая через точки  $M_1, M_2, M_3$ , имеет уравнение

$$(\overrightarrow{M_1M}; \overrightarrow{M_1M_2}; \overrightarrow{M_1M_3}) = 0. \quad (1)$$

Пусть точки  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  заданы своими координатами в некоторой прямоугольной декартовой системе координат:

$$M_1(x_1; y_1; z_1), \quad M_2(x_2; y_2; z_2), \quad M_3(x_3; y_3; z_3).$$

Тогда уравнение (1) в координатах записывается следующим образом:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (2)$$

**Задача.** Написать уравнение плоскости, проходящей через точки  $M_1(-1; 4; -1)$ ,  $M_2(-13; 2; -10)$ ,  $M_3(6; 0; 12)$ , и найти один из ее нормальных векторов.

△ Плоскость, проходящая через заданные точки, имеет уравнение (см. (2))

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-4 & z+1 \\ -12 & -2 & -9 \\ 7 & -4 & 13 \end{vmatrix} = 0.$$

Разложив этот определитель по элементам первой строки, получим

$$-62(x+1) + 93(y-4) + 62(z+1) = 0.$$

Следовательно, плоскость имеет уравнение

$$2x - 3y - 2z + 12 = 0,$$

а вектор с координатами  $(2; -3; -2)$  является нормальным вектором этой плоскости. ▲

### Вопросы для контроля

1. Какой вектор называется нормальным вектором плоскости?
2. Как записывается уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору?
3. Какой вид имеет общее уравнение плоскости?
4. Записать уравнение плоскости, проходящей через данную точку параллельно двум данным векторам, в векторной и координатной формах.
5. Как вычисляется нормальный вектор плоскости, параллельный двум данным неколлинеарным векторам?
6. Как записывается в векторной форме и в координатной форме уравнение плоскости, проходящей через три точки?

## Упражнения

6.1. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точки  $M_1, M_2, M_3$ , если:

- 1)  $M_1(-2; 3; 5), M_2(4; -3; 0), M_3(0; 6; -5);$
- 2)  $M_1(2; 0; 4), M_2(3; 1; -2), M_3(0; -3; -1);$
- 3)  $M_1(3; 1; -5), M_2(8; 3; 3), M_3(-2; -1; 4).$

6.2. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку  $M_0$  и перпендикулярной вектору  $\mathbf{n}$ , если:

- 1)  $M_0(2; 3; 5), \mathbf{n} = (4; 6; 0);$
- 2)  $M_0(3; -5; -2), \mathbf{n} = (4; -6; 1);$
- 3)  $M_0(0; 0; 0), \mathbf{n} = (0; -7; 4);$
- 4)  $M_0(1; 2; 3), \mathbf{n} = (0; 1; 0).$

6.3. Составьте уравнение плоскости, которая проходит через точку  $M_0$  параллельно заданной плоскости, если:

- 1)  $M_0(1; -5; 4), 4x - 7z + 6 = 0;$
- 2)  $M_0(3; 4; -11), z = 0;$
- 3)  $M_0(2; -1; 3), \frac{x}{2} - \frac{y}{7} + \frac{z}{2} = 1.$

6.4. Найдите уравнение плоскости, которая проходит через точку  $M_0(1; 2; 4)$  и ось абсцисс.

6.5. Найдите уравнение плоскости, которая проходит через точки  $M_1(2; -1; 1)$  и  $M_2(0; 1; 2)$  параллельно оси ординат.

## § 25. Взаимное расположение плоскостей

1. **Условия параллельности и пересечения двух плоскостей.** Очевидно, что две плоскости параллельны тогда и только тогда, когда их нормальные векторы коллинеарны. Отсюда следует условие параллельности двух плоскостей, заданных своими общими уравнениями:

$$\begin{aligned} p_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0, \\ p_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0. \end{aligned}$$

Для того чтобы плоскости  $p_1$  и  $p_2$  были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Это условие является условием коллинеарности векторов  $\mathbf{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$  и  $\mathbf{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$ .

Две плоскости в пространстве или параллельны, или пересекаются. Поэтому плоскости  $p_1$  и  $p_2$  пересекаются тогда и только тогда, когда условие (1) не выполняется, т. е. когда выполняется хотя бы одно из двух неравенств

$$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \quad \text{или} \quad \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}.$$

**Задача.** При каких значениях параметров  $\alpha$  и  $\beta$  плоскости, заданные уравнениями

$$4x + 2y + \alpha z + 1 = 0 \quad \text{и} \quad 2x + y + 2z + \beta = 0,$$

параллельны, пересекаются, совпадают?

$\Delta$  Заданные плоскости параллельны тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\frac{4}{2} = \frac{2}{1} = \frac{\alpha}{2}.$$

Оно выполняется только при  $\alpha = 4$ . Следовательно, данные плоскости при  $\alpha = 4$  и любом  $\beta$  параллельны; если  $\alpha \neq 4$ , то плоскости пересекаются.

Если  $\alpha = 4$  и  $\beta = \frac{1}{2}$ , то данные уравнения, очевидно, определяют одну и ту же плоскость. В случае, когда  $\alpha = 4$  и  $\beta \neq \frac{1}{2}$ , плоскости не имеют общих точек.  $\blacktriangle$

**2. Условие перпендикулярности двух плоскостей.** Очевидно, что две плоскости перпендикулярны тогда и только тогда, когда их нормальные векторы ортогональны. Отсюда следует условие перпендикулярности двух плоскостей, заданных своими общими уравнениями (см. п. 1).

*Для того чтобы плоскости  $p_1$  и  $p_2$  были перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Это условие является условием ортогональности нормальных векторов  $\mathbf{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$  и  $\mathbf{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$  плоскостей  $p_1$  и  $p_2$ .

**Задача.** При каком значении параметров  $\alpha$  и  $\beta$  плоскости, заданные уравнениями

$$2x + y + \alpha z + 1 = 0 \quad \text{и} \quad x + y + 2z + \beta = 0,$$

перпендикулярны? Когда они пересекаются?

$\Delta$  Заданные плоскости перпендикулярны тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + \alpha \cdot 2 = 0,$$

т. е. когда  $\alpha = -\frac{3}{2}$ , а  $\beta$  — любое.

Так как  $\frac{2}{1} \neq \frac{1}{1}$ , то данные плоскости пересекаются при любых значениях  $\alpha$  и  $\beta$ .  $\blacktriangle$



**3. Угол между плоскостями.** Рассмотрим две плоскости  $p_1$  и  $p_2$  с нормальными векторами  $n_1$  и  $n_2$ . Угол  $\varphi$  между плоскостями  $p_1$  и  $p_2$  выражается через угол  $\psi = \angle(n_1; n_2)$  следующим образом: если  $\psi \leq 90^\circ$ , то  $\varphi = \psi$ .

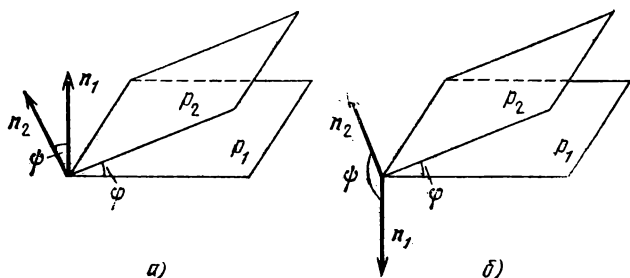


Рис. 187

(рис. 187, а); если  $\psi > 90^\circ$ , то  $\varphi = 180^\circ - \psi$  (рис. 187, б). Очевидно, что в любом случае справедливо равенство

$$\cos \varphi = |\cos \psi|.$$

Так как

$$\cos \psi = \cos \angle(n_1; n_2) = \frac{n_1 \cdot n_2}{|n_1| \cdot |n_2|},$$

то косинус угла  $\varphi$  между плоскостями  $p_1$  и  $p_2$  может быть вычислен по формуле

$$\cos \varphi = \frac{|n_1 \cdot n_2|}{|n_1| \cdot |n_2|}. \quad (1)$$

Если плоскости заданы общими уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad \text{и} \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

то за их нормальные векторы можно взять векторы  $n_1 = (A_1; B_1; C_1)$  и  $n_2 = (A_2; B_2; C_2)$ .

Записав правую часть формулы (1) через координаты, получим

$$\cos \varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \quad (2)$$

**Задача.** Вычислить угол между плоскостями

$$x - \sqrt{2}y + z - 2 = 0 \quad \text{и} \quad x + \sqrt{2}y - z + 13 = 0.$$

$\triangle$  В данном случае

$$A_1 = 1, \quad B_1 = -\sqrt{2}, \quad C_1 = 1, \quad A_2 = 1, \quad B_2 = \sqrt{2}, \quad C_2 = -1.$$

По формуле (2) получаем

$$\cos \varphi = \frac{|1 \cdot 1 - \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} - 1 \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + (-\sqrt{2})^2 + 1^2} \sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, угол между данными плоскостями равен  $60^\circ$ . ▲

### Вопросы для контроля

1. Сформулировать необходимое и достаточное условие параллельности двух плоскостей, заданных общими уравнениями.
2. Когда две плоскости, заданные общими уравнениями, пересекаются?
3. Сформулировать необходимое и достаточное условие перпендикулярности плоскостей.
4. Как вычисляется угол между плоскостями?

### Упражнения

6.6. Установите, какие из следующих пар плоскостей параллельны, перпендикулярны, совпадают:

- 1)  $2x + 3y + 4z - 12 = 0$  и  $6x + 9y + 12z - 12 = 0$ ;
- 2)  $3x + 4y - z + 1 = 0$  и  $x - 2y - 5z + 3 = 0$ ;
- 3)  $2x + 3y - 4z = 0$  и  $2x + y + z - 13 = 0$ ;
- 4)  $10x - 12y + 6z - 240 = 0$  и  $\frac{x}{24} - \frac{y}{20} + \frac{z}{40} = 0$ .

6.7. Установите, при каких значениях  $k$  перпендикулярны следующие плоскости:

- 1)  $3x + ky + 4z - 5 = 0$  и  $4x - 3y + 4z + 2 = 0$ ;
- 2)  $3x + 4y + kz - 6 = 0$  и  $4x - 3y + 4z + 1 = 0$ ;
- 3)  $kx + 4y + 3z - 4 = 0$  и  $3y - 4z + 3 = 0$ .

6.8. Установите, при каких значениях  $\alpha$  и  $\beta$  параллельны следующие плоскости:

- 1)  $3x + \alpha y + 4z - 3 = 0$  и  $4x - 3y + \beta z + 4 = 0$ ;
- 2)  $3x + \alpha y + 4z - 2 = 0$  и  $4x + \beta z + 5 = 0$ ;
- 3)  $3x + y + \alpha z - 1 = 0$  и  $6x + 2y + 10z + \beta = 0$ .

6.9. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точки  $M_1(3; -2; 1)$  и  $M_2(6; 0; 5)$  и перпендикулярной плоскости  $x - y + 2z - 4 = 0$ .

6.10. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку  $M_0(1; 2; 3)$  и перпендикулярной плоскостям  $x - y + z - 7 = 0$ ,  $3x + 2y - 12z + 5 = 0$ .

6.11. Составьте уравнение плоскости, которая проходит через точку  $M_0(3; -2; 1)$  перпендикулярно плоскостям  $3y - 5x + 1 = 0$ ,  $x = 0$ .

6.12. Вычислите угол между плоскостями:

- 1)  $x - 4y - 8z + 1 = 0$  и  $x + 20y + 7z = 0$ ;
- 2)  $6x + 3y - 2z - 7 = 0$  и  $x + 2y + 6z - 5 = 0$ ;
- 3)  $8x + 4y + z = 0$  и  $2x - 2y + z + 13 = 0$ ;
- 4)  $x - z - 7 = 0$  и  $y - z + 5 = 0$ .

## § 26. Уравнения прямых

1. Уравнение прямой, проходящей через данную точку параллельно данному вектору. Как и на плоскости, любой ненулевой вектор, параллельный данной прямой, называется *направляющим вектором* этой прямой.

Положение прямой в пространстве полностью определяется заданием направляющего вектора и точки, принадлежащей прямой. Пусть прямая  $l$  с направляющим вектором  $\mathbf{a}$  проходит через точку  $M_0$ , а  $M$  — произвольная точка пространства. Очевидно, что точка  $M$  (рис. 188)

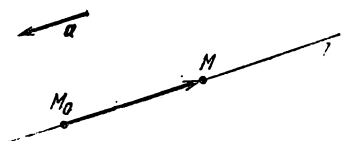


Рис. 188

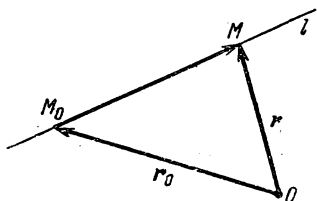


Рис. 189

принадлежит прямой  $l$  тогда и только тогда, когда вектор  $\overrightarrow{M_0M}$  коллинеарен вектору  $\mathbf{a}$ , т. е.

$$\overrightarrow{M_0M} = t\mathbf{a}, \quad t \in \mathbf{R}. \quad (1)$$

Если точки  $M$  и  $M_0$  заданы своими радиус-векторами  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}_0$  (рис. 189) относительно некоторой точки  $O$  пространства, то  $\overrightarrow{M_0M} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$  и уравнение (1) принимает вид

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{a}, \quad t \in \mathbf{R}. \quad (2)$$

Уравнения (1) и (2) называются *векторно-параметрическими уравнениями* прямой. Переменная  $t$  в векторно-параметрических уравнениях прямой называется *параметром*.

Пусть точка  $M_0$  прямой  $l$  и направляющий вектор  $\mathbf{a}$  заданы своими координатами:

$$M_0(x_0; y_0; z_0), \quad \mathbf{a} = (a_1; a_2; a_3).$$

Тогда, если  $(x; y; z)$  — координаты произвольной точки  $M$  прямой  $l$ , то

$$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$$

и векторное уравнение (1) равносильно следующим трем уравнениям:

$$x - x_0 = ta_1, \quad y - y_0 = ta_2, \quad z - z_0 = ta_3$$

или

$$\begin{cases} x = x_0 + ta_1, \\ y = y_0 + ta_2, \\ z = z_0 + ta_3, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Уравнения (3) называются *параметрическими уравнениями прямой* в пространстве.

**Задача 1.** Написать параметрические уравнения прямой, проходящей через точку  $M_0(-3; 2; 4)$  и имеющей направляющий вектор  $\mathbf{a} = (2; -5; 3)$ .

△ В данном случае  $x_0 = -3$ ,  $y_0 = 2$ ,  $z_0 = 4$ ,  $a_1 = 2$ ,  $a_2 = -5$ ,  $a_3 = 3$ . Подставив эти значения в формулы (3), получим параметрические уравнения данной прямой

$$\begin{cases} x = -3 + 2t, \\ y = 2 - 5t, \\ z = 4 + 3t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}. \quad \blacktriangle$$

Исключим параметр  $t$  из уравнений (3). Это можно сделать, так как  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ , и поэтому одна из координат вектора  $\mathbf{a}$  заведомо отлична от нуля.

Пусть сначала все координаты отличны от нуля. Тогда

$$t = \frac{x - x_0}{a_1}, \quad t = \frac{y - y_0}{a_2}, \quad t = \frac{z - z_0}{a_3},$$

и, следовательно,

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}. \quad (4)$$

Эти уравнения называются *каноническими уравнениями прямой*.

Заметим, что уравнения (4) образуют систему двух уравнений с тремя переменными  $x$ ,  $y$  и  $z$ .

Если в уравнениях (3) одна из координат вектора  $\mathbf{a}$ , например  $a_1$ , равна нулю, то, исключив параметр  $t$ , снова получим систему двух уравнений с тремя переменными  $x$ ,  $y$  и  $z$ :

$$x = x_0, \quad \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}.$$

Для единообразия их также условно записывают в виде (4)

$$\frac{x-x_0}{0} = \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-z_0}{a_3},$$

считая, что если знаменатель равен нулю, то равен нулю и соответствующий числитель.

Наконец, если в уравнениях (3) две координаты вектора  $\mathbf{a}$ , например  $a_1$  и  $a_2$ , равны нулю, то эти уравнения принимают вид

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0 + ta_3, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Это уравнения прямой, проходящей через точку  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  параллельно оси  $Oz$ . Для такой прямой  $x = x_0$ ,  $y = y_0$ , а  $z$  — любое число. И в этом случае для единообразия уравнения прямой можно записывать (с той же оговоркой) в виде (4)

$$\frac{x-x_0}{0} = \frac{y-y_0}{0} = \frac{z-z_0}{a_3}.$$

Таким образом, для любой прямой пространства можно написать канонические уравнения (4), и, наоборот, любое уравнение вида (4) при условии, что хотя бы один из коэффициентов  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  не равен нулю, задает некоторую прямую пространства.

**Задача 2.** Написать канонические уравнения прямой, проходящей через точку  $M_0(-1; 1; 7)$  параллельно вектору  $\mathbf{a} = (1; 2; 3)$ .

△ Уравнения (4) в данном случае записываются следующим образом:

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-7}{3}. \quad \triangle$$

**2. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки.** Через две точки в пространстве проходит единственная прямая. Выведем уравнение прямой  $l$ , проходящей через две данные точки  $M_1(x_1; y_1; z_1)$  и  $M_2(x_2; y_2; z_2)$ .

Точка  $M(x; y; z)$  принадлежит прямой  $l$  тогда и только тогда, когда векторы  $\overrightarrow{M_1M}$  и  $\overrightarrow{M_1M_2}$  коллинеарны. Так как

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_1M} &= (x - x_1; y - y_1; z - z_1), \\ \overrightarrow{M_1M_2} &= (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1), \end{aligned}$$

то условие коллинеарности этих векторов запишется так:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}, \quad (1)$$

где, как обычно, считается, что если знаменатель равен нулю, то равен нулю и соответствующий числитель. Уравнения (1) являются уравнениями прямой, проходящей через две точки  $M_1(x_1; y_1; z_1)$  и  $M_2(x_2; y_2; z_2)$ .

**Задача 1.** Написать уравнения прямой, проходящей через точки  $M_1(-4; 1; -3)$  и  $M_2(-5; 0; 3)$ .

△ В данном случае  $x_1 = -4$ ,  $y_1 = 1$ ,  $z_1 = -3$ ,  $x_2 = -5$ ,  $y_2 = 0$ ,  $z_2 = 3$ . Подставив эти значения в формулы (1), получим

$$\frac{x+4}{-1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+3}{6}. \quad \blacktriangle$$

**Задача 2.** Написать уравнения прямой, проходящей через точки  $M_1(3; -2; 1)$  и  $M_2(5; -2; \frac{1}{2})$ .

△ После подстановки координат точек  $M_1$  и  $M_2$  в уравнения (1) получим

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{0} = \frac{z-1}{-\frac{1}{2}}. \quad \blacktriangle$$

**3. Прямая как пересечение двух плоскостей.** Если плоскости  $p_1$  и  $p_2$ , заданные уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad (1)$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \quad (2)$$

пересекаются, то уравнения (1), (2) являются *уравнениями прямой  $l$  пересечения плоскостей  $p_1$  и  $p_2$* . Покажем, как можно найти канонические уравнения этой прямой.

Чтобы написать канонические уравнения прямой  $l$ , нужно знать координаты ее некоторой точки  $M_0$  и координаты ее направляющего вектора  $a$ .

За координаты точки  $M_0$  можно взять любое решение  $x_0, y_0, z_0$  системы уравнений (1), (2). За направляющий вектор  $a$  прямой  $l$  можно взять векторное произведение нормальных векторов плоскостей  $p_1$  и  $p_2$ , т. е.

$$a = [n_1; n_2],$$

где  $n_1 = (A_1; B_1; C_1)$ ,  $n_2 = (A_2; B_2; C_2)$ .

В самом деле (рис. 190), вектор  $[n_1; n_2]$  ортогонален векторам  $n_1$  и  $n_2$  (по определению). Поэтому он параллелен плоскостями  $p_1$  и  $p_2$  и, следовательно, параллелен прямой  $l$  их пересечения.

**Задача 1.** Составить канонические уравнения прямой, являющейся пересечением плоскостей  $x - 2y + z + 1 = 0$  и  $2x - y + 3z - 2 = 0$ .

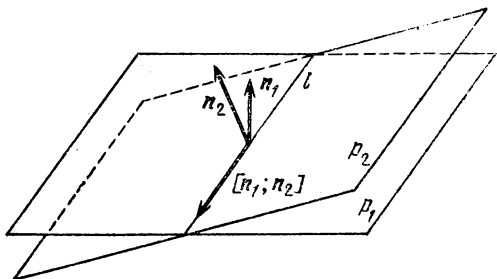


Рис. 190

$\Delta$  Так как  $n_1 = (1; -2; 1)$ ,  $n_2 = (2; -1; 3)$ , то

$$a = [n_1; n_2] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -5i - j + 3k.$$

Для определения координат какой-либо точки данной прямой найдем какое-либо решение системы уравнений

$$\begin{cases} x - 2y + z + 1 = 0, \\ 2x - y + 3z - 2 = 0. \end{cases}$$

Положив, например,  $z = 0$ , получим

$$\begin{cases} x - 2y = -1, \\ 2x - y = 2, \end{cases}$$

откуда  $x = \frac{5}{3}$ ,  $y = \frac{4}{3}$ . Следовательно, исходная система имеет решение  $\left(\frac{5}{3}; \frac{4}{3}; 0\right)$ , и поэтому данная прямая проходит через точку  $M\left(\frac{5}{3}; \frac{4}{3}; 0\right)$ .

Зная координаты точки прямой и координаты ее направляющего вектора, записываем канонические уравнения

данной прямой

$$\frac{x - \frac{5}{3}}{-5} = \frac{y - \frac{4}{3}}{-1} = \frac{z}{3}. \blacktriangle$$

Заметим, что если плоскости  $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$  и  $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$  пересекаются, то уравнение всякой плоскости, проходящей через прямую их пересечения, может быть записано в виде

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0,$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — некоторые числа.

**Задача 2.** Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую пересечения плоскостей  $3x - 2y - z + 4 = 0$  и  $x - 4y - 3z - 2 = 0$  и точку  $M_0(1; 1; -2)$ .

$\triangle$  Составим уравнение плоскостей, проходящих через прямую пересечения данных плоскостей:

$$\alpha(3x - 2y - z + 4) + \beta(x - 4y - 3z - 2) = 0.$$

Так как точка  $M_0$  принадлежит искомой плоскости, то

$$\alpha(3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 + 2 + 4) + \beta(1 - 4 \cdot 1 + 6 - 2) = 0,$$

и, следовательно,

$$7\alpha + \beta = 0,$$

откуда, например,  $\alpha = 1$ ,  $\beta = -7$ .

Искомым уравнением плоскости будет

$$3x - 2y - z + 4 - 7(x - 4y - 3z - 2) = 0,$$

или

$$2x - 13y - 10z - 9 = 0. \blacktriangle$$

### Вопросы для контроля

1. Какой вектор называется направляющим вектором прямой?
2. Как записываются параметрические уравнения прямой, проходящей через данную точку параллельно данному вектору?
3. Как записываются канонические уравнения прямой в пространстве?
4. Написать уравнение прямой, проходящей через две заданные точки.
5. Как найти направляющий вектор прямой, являющейся пересечением двух плоскостей, заданных своими общими уравнениями?



## Упражнения

6.13. Дан параллелепипед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Запишите через векторы  $\overrightarrow{AB} = \mathbf{r}_1$ ,  $\overrightarrow{AD} = \mathbf{r}_2$ ,  $\overrightarrow{AA_1} = \mathbf{r}_3$  векторно-параметрические уравнения прямых:

- 1)  $AC_1$ ; 2)  $CA_1$ ; 3)  $BD_1$ ; 4)  $DB_1$ ; 5)  $CD_1$ .

6.14. Напишите параметрические уравнения прямой, проходящей через точку  $M_0$  и имеющей направляющий вектор  $\mathbf{a}$ , если:

- 1)  $M_0(1; 2; 3)$ ,  $\mathbf{a} = (2; -2; 1)$ ;  
 2)  $M_0(3; -2; 0)$ ,  $\mathbf{a} = (1; -1; \sqrt{2})$ ;  
 3)  $M_0\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}\right)$ ,  $\mathbf{a} = (0; 3; 5)$ .

6.15. Напишите канонические уравнения прямой, проходящей через точку  $M_0$  и имеющей направляющий вектор  $\mathbf{a}$ , если:

- 1)  $M_0(-2; 0; 1)$ ,  $\mathbf{a} = (2; -3; 4)$ ;  
 2)  $M_0(2; -1; 0)$ ,  $\mathbf{a} = (\sqrt{3}; \sqrt{2}; 1)$ ;  
 3)  $M_0(3; 0; -3)$ ,  $\mathbf{a} = (0; 1; 0)$ .

6.16. Напишите канонические уравнения прямой, проходящей через точки  $M_1$  и  $M_2$ , если:

- 1)  $M_1(3; -1; 0)$ ,  $M_2(-2; -5; 4)$ ;  
 2)  $M_1(1; -1; 4)$ ,  $M_2(4; -1; 2)$ ;  
 3)  $M_1(0; 1; -5)$ ,  $M_2(-2; 1; -5)$ .

6.17. Дан треугольник с вершинами в точках  $A(1; -2; -4)$ ,  $B(1; 6; -8)$ ,  $C(-7; 11; 6)$ . Отрезок  $CM$  — медиана треугольника. Напишите параметрические и канонические уравнения прямой  $CM$ .

6.18. Составьте канонические уравнения прямой пересечения плоскостей  $x - 2y + 3z - 4 = 0$  и  $3x + 2y - 5z - 4 = 0$ .

6.19. Найдите канонические уравнения следующих прямых:

- 1)  $\begin{cases} x + y - z + 2 = 0, \\ 3x - 1 = 0; \end{cases}$  2)  $\begin{cases} 2x - 3 = 0, \\ y + 5 = 0; \end{cases}$   
 3)  $\begin{cases} x - y + 2z = 0, \\ 2x + 3y - z = 0; \end{cases}$  4)  $\begin{cases} 3x + 5y - 6 = 0, \\ x - 2y + 3 = 0; \end{cases}$   
 5)  $\begin{cases} y + 2z = 0, \\ 3y - z = 0; \end{cases}$  6)  $\begin{cases} 2y + z = 0, \\ 3x - 1 = 0. \end{cases}$

6.20. Найдите канонические уравнения прямых, образованных пересечением плоскости  $2x - 3y - 4z + 11 = 0$  с координатными плоскостями.

6.21. Найдите параметрические уравнения прямой:

- 1)  $\begin{cases} x - 2y + 3z - 4 = 0, \\ 3x + 2y - 5z - 4 = 0; \end{cases}$  2)  $\begin{cases} x - 2y + 3z + 1 = 0, \\ 2x + y - 4z - 8 = 0. \end{cases}$

6.22. Найдите уравнение плоскости, проходящей через прямую пересечения плоскостей  $2x - 3y + z - 3 = 0$ ,  $x + 3y + 2z + 1 = 0$  и точку  $M_0(1; -2; 3)$ .

6.23. Найдите уравнение плоскости, проходящей через прямую пересечения плоскостей  $2x - y + 3z - 5 = 0$ ,  $x + 2y - z + 2 = 0$  и параллельно вектору  $(2; -1; -2)$ .

## § 27. Взаимное расположение прямых

1. **Условие принадлежности двух прямых одной плоскости. Скрещивающиеся прямые.** Очевидно, что прямая  $l_1$ , проходящая через точку  $M_1$  параллельно вектору  $\mathbf{a}$ , и прямая  $l_2$ , проходящая через точку  $M_2$  параллельно вектору  $\mathbf{b}$  (рис. 191), лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда векторы  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\overrightarrow{M_1M_2}$  компланарны, т. е. когда их смешанное произведение равно нулю:

$$(\mathbf{a}; \mathbf{b}; \overrightarrow{M_1M_2}) = 0. \quad (1)$$

Отсюда следует, что две прямые скрещиваются тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$(\mathbf{a}; \mathbf{b}; \overrightarrow{M_1M_2}) \neq 0, \quad (2)$$

где  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  — направляющие векторы прямых, а  $M_1$  и  $M_2$  — точки, принадлежащие соответственно этим двум прямым.

Если точки  $M_1$  и  $M_2$  и векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  заданы своими координатами в некоторой прямоугольной декартовой системе координат:

$$\begin{aligned} M_1(x_1; y_1; z_1), \quad M_2(x_2; y_2; z_2), \\ \mathbf{a} = (a_1; a_2; a_3), \quad \mathbf{b} = (b_1; b_2; b_3), \end{aligned}$$

то условие (1) в координатах имеет вид

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (3)$$

**Задача.** Исследовать взаимное расположение прямых

а)  $\frac{x-2}{2} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-4}{1}$  и  $\frac{x-3}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{3}$ ;

б)  $\begin{cases} x = 3 + 2t, \\ y = 3 - 8t, \\ z = 7 + 4t \end{cases}$  и  $\begin{cases} x = 2 - t, \\ y = 5 + t, \\ z = 7 + t. \end{cases}$

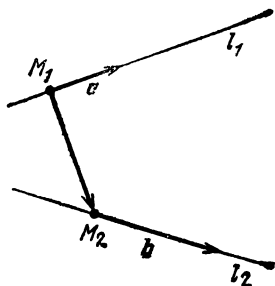


Рис. 191

△ а) В данном случае  $\mathbf{a} = (2; 3; 1)$ ,  $\mathbf{b} = (-1; 2; 3)$ ,  $M_1(2; 4; 4)$ ,  $M_2(3; -1; 3)$ . Проверяем условие (3):

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -5 & -1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = \\ = 26 + 6 + 3 \neq 0.$$

Следовательно, данные прямые скрещиваются.

б) Направляющие векторы прямых имеют координаты  $\mathbf{a} = (2; -8; 4)$ ,  $\mathbf{b} = (-1; 1; 1)$ . Первая прямая проходит через точку  $M_1(3; 3; 7)$ , вторая — через точку  $M_2(2; 5; 7)$ . Проверяем условие (3):

$$\begin{vmatrix} 2 & -8 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 8 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = \\ = -4 + 8 - 4 = 0.$$

Данные прямые лежат в одной плоскости. Направляющие векторы прямых, очевидно, неколлинеарны. Следовательно, прямые пересекаются. ▲

**2. Условие параллельности двух прямых.** Прямые параллельны тогда и только тогда, когда их направляющие векторы коллинеарны.

Следовательно, чтобы две прямые с направляющими векторами  $\mathbf{a} = (a_1; a_2; a_3)$  и  $\mathbf{b} = (b_1; b_2; b_3)$  были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}. \quad (1)$$

**Задача.** Являются ли параллельными прямые

а)  $\frac{x-0,3}{2} = \frac{y+5}{4} = \frac{z-1}{-13}$  и  $\frac{x+1}{3} = \frac{y-4}{5} = \frac{z+2}{2}$ ;

б)  $\begin{cases} 2x-3y+8=0, \\ 4x-2y-2z+1=0 \end{cases}$  и  $\frac{x-7}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{4}$ ?

△ а) Данные прямые имеют направляющие векторы  $\mathbf{a} = (2; 4; -13)$  и  $\mathbf{b} = (3; 5; 2)$ . Эти векторы неколлинеарны. Следовательно, данные прямые непараллельны.

б) Направляющий вектор второй прямой имеет координаты  $\mathbf{b} = (3; 2; 4)$ . За направляющий вектор первой прямой можно взять векторное произведение нормальных векторов  $\mathbf{n}_1 = (2; -3; 0)$  и  $\mathbf{n}_2 = (4; -2; -2)$  плоскостей,

задающих эту прямую:

$$\mathbf{a} = [\mathbf{n}_1; \mathbf{n}_2] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -3 & 0 \\ 4 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 6\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 8\mathbf{k}.$$

Условие (1) выполняется, так как  $\frac{6}{3} = \frac{4}{2} = \frac{8}{4}$ . Прямые параллельны. ▲

**3. Условия перпендикулярности двух прямых.** Прямые перпендикулярны тогда и только тогда, когда они лежат в одной плоскости и их направляющие векторы ортогональны.

Следовательно, прямая  $l_1$ , проходящая через точку  $M_1(x_1; y_1; z_1)$  параллельно вектору  $\mathbf{a} = (a_1; a_2; a_3)$ , перпендикулярна прямой  $l_2$ , проходящей через точку  $M_2(x_2; y_2; z_2)$  параллельно вектору  $\mathbf{b} = (b_1; b_2; b_3)$ , тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} = 0, \quad (1)$$

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0. \quad (2)$$

**Задача.** При каком значении параметра  $\alpha$  прямая

$$\frac{x-0,3}{2} = \frac{y+5}{4} = \frac{z-\alpha}{-13}$$

перпендикулярна прямой

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-4}{5} = \frac{z+2}{2}?$$

▲ Направляющие векторы  $\mathbf{a} = (2; 4; -13)$  и  $\mathbf{b} = (3; 5; 2)$  этих прямых ортогональны, так как  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 - 13 \cdot 2 = 0$ .

Из условия (1) (условия принадлежности прямых одной плоскости) находим, что  $\alpha$  удовлетворяет уравнению

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -13 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1,3 & -9 & 2+\alpha \end{vmatrix} = 0,$$

из которого получаем  $\alpha = 82,8$ . ▲

**4. Угол между прямыми.** Задача вычисления угла между двумя прямыми в пространстве решается так же, как и на плоскости (§ 7). Обозначим через  $\varphi$  величину угла между прямыми  $l_1$  и  $l_2$ , а через  $\psi$  — величину угла между направляющими векторами  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  этих прямых.

Тогда если  $\psi \leq 90^\circ$  (рис. 192, а), то  $\varphi = \psi$ ; если же  $\psi > 90^\circ$  (рис. 192, б), то  $\varphi = 180^\circ - \psi$ . Очевидно, что в обоих случаях верно равенство  $\cos \varphi = |\cos \psi|$ . Тогда

$$\cos \psi = \cos \angle(a; b) = \frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|},$$

и, следовательно,

$$\cos \varphi = \frac{|a \cdot b|}{|a| \cdot |b|}.$$

Пусть прямые заданы своими каноническими уравнениями

$$\frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{a_2} = \frac{z-z_1}{a_3} \quad \text{и} \quad \frac{x-x_2}{b_1} = \frac{y-y_2}{b_2} = \frac{z-z_2}{b_3}.$$

Тогда угол  $\varphi$  между прямыми определяется с помощью формулы

$$\cos \varphi = \frac{|a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}. \quad (1)$$

Если одна из прямых (или обе) задана не каноническими уравнениями, то для вычисления угла нужно найти

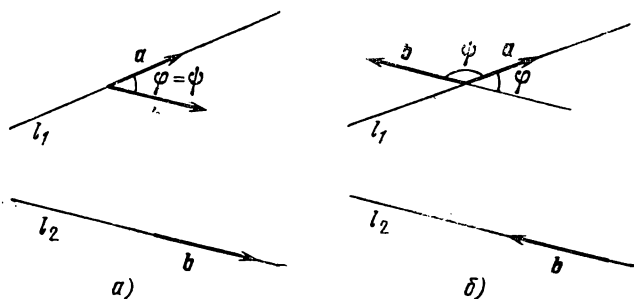


Рис. 192

координаты направляющих векторов этих прямых, а затем воспользоваться формулой (1).

**Задача 1.** Вычислить угол между прямыми

$$\frac{x+3}{-\sqrt{2}} = \frac{y}{\sqrt{2}} = \frac{z-7}{-2} \quad \text{и} \quad \frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{y+1}{\sqrt{3}} = \frac{z-1}{\sqrt{6}}.$$

$\Delta$  Направляющие векторы прямых имеют координаты  $a = (-\sqrt{2}; \sqrt{2}; -2)$ ,  $b = (\sqrt{3}; \sqrt{3}; \sqrt{6})$ . По

формуле (1) находим

$$\cos \varphi = \frac{|-\sqrt{6} + \sqrt{6} - 2\sqrt{6}|}{\sqrt{2+2+4}\sqrt{3+3+6}} = \frac{2\sqrt{6}}{2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, угол между данными прямыми равен  $60^\circ$ . ▲

Задача 2. Вычислить угол между прямыми

$$\begin{cases} 3x - 12z + 7 = 0, \\ x + y - 3z - 1 = 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} 4x - y + z = 0, \\ y + z + 1 = 0. \end{cases}$$

△ За направляющий вектор  $\mathbf{a}$  первой прямой возьмем векторное произведение нормальных векторов  $\mathbf{n}_1 = (3; 0; -12)$  и  $\mathbf{n}_2 = (1; 1; -3)$  плоскостей, задающих эту прямую. По формуле (4) п. 2 § 23 получаем

$$\mathbf{a} = [\mathbf{n}_1; \mathbf{n}_2] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 0 & -12 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 12\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 3\mathbf{k}.$$

Аналогично находим направляющий вектор второй прямой:

$$\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 4\mathbf{k}.$$

По формуле (1) вычисляем косинус искомого угла:

$$\cos \varphi = \frac{|12 \cdot (-2) - 3 \cdot (-4) + 3 \cdot 4|}{\sqrt{12^2 + 3^2 + 3^2} \sqrt{2^2 + 4^2 + 4^2}} = 0.$$

Следовательно, угол между данными прямыми равен  $90^\circ$ . ▲

Задача 3. В треугольной пирамиде  $МABC$  ребра  $МА$ ,  $МВ$  и  $МС$  взаимно перпендикулярны (рис. 193); их длины соответственно равны 4, 3, 6. Точка  $D$  — середина  $МА$ . Найти угол  $\varphi$  между прямыми  $СА$  и  $DB$ .

△ Пусть  $\vec{CA}$  и  $\vec{DB}$  — направляющие векторы прямых  $CA$  и  $DB$ .

Примем точку  $M$  за начало координат. По условию задачи имеем  $A(4; 0; 0)$ ,  $B(0; 0; 3)$ ,  $C(0; 6; 0)$ ,  $D(2; 0; 0)$ . Поэтому  $\vec{CA} = (4; -6; 0)$ ,  $\vec{DB} = (-2; 0; 3)$ .

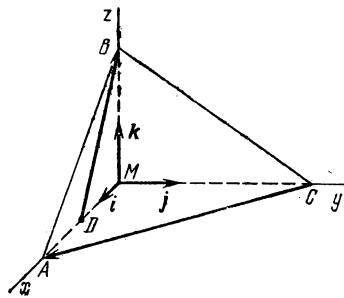


Рис. 193

Воспользуемся формулой (1):

$$\cos \varphi = \frac{|4 \cdot (-2) + (-6) \cdot 0 + 0 \cdot 3|}{\sqrt{16+36+0} \sqrt{4+0+9}} = \frac{4}{13}.$$

По таблице косинусов находим, что угол между прямыми  $CA$  и  $DB$  приблизительно равен  $72^\circ$ . ▲

### Вопросы для контроля

1. Как записывается условие принадлежности к одной плоскости двух прямых, заданных каноническими уравнениями?
2. Запишите условие параллельности двух прямых, заданных каноническими уравнениями.
3. Как записываются условия перпендикулярности двух прямых?
4. Как вычисляется угол между прямыми в пространстве?

### Упражнения

6.24. Установите, лежат ли прямые в одной плоскости:

1)  $\frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{2}$  и  $\frac{x+49}{48} = \frac{y+37}{37} = \frac{z}{4}$ ;

2)  $\frac{x-10}{11} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z}{-13}$  и  $\begin{cases} x = -2 + 3t, \\ y = -1, \\ z = 4 - t; \end{cases}$

3)  $\begin{cases} 2x - 3z + 2 = 0, \\ 2y - z - 6 = 0 \end{cases}$  и  $\begin{cases} x - 12z + 49 = 0, \\ 4y - 37z + 148 = 0; \end{cases}$

4)  $\begin{cases} x = 3z - 1, \\ y = -5z + 7 \end{cases}$  и  $\begin{cases} y = 2x - 5, \\ z = 7x + 2. \end{cases}$

6.25. Установите, являются ли данные прямые скрещивающимися:

1)  $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z}{-1}$  и  $\frac{x}{-2} = \frac{y+5}{3} = \frac{z-4}{1}$ ;

2)  $\begin{cases} x + 2y - 5z - 1 = 0, \\ x - 2y + 3z - 9 = 0 \end{cases}$  и  $\begin{cases} x + y - 3z + 1 = 0, \\ x - y + z + 3 = 0. \end{cases}$

6.26. Установите, какие из следующих пар прямых являются параллельными, какие — перпендикулярными:

1)  $\frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-1}{-2}$  и  $\frac{x-7}{5} = \frac{y-1}{6} = \frac{z-3}{1}$ ;

2)  $\begin{cases} x = t, \\ y = -4t, \\ z = -3t \end{cases}$  и  $\begin{cases} x = t, \\ y = -8 - 4t, \\ z = -3 - 3t; \end{cases}$

3)  $\begin{cases} 2x - 2z - 7 = 0, \\ x + y - 3z + 5 = 0 \end{cases}$  и  $\begin{cases} x + 2y - 5z = 0, \\ x - 2y + 3z - 13 = 0; \end{cases}$

4)  $\begin{cases} x - 4z = 0, \\ 2x - y - 9z + 2 = 0 \end{cases}$  и  $\begin{cases} 3y + 3z - 11 = 0, \\ 2x - 2y - z + 11 = 0. \end{cases}$

6.27. Даны прямые

$$\frac{x+2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-1}{4}, \quad \frac{x-3}{\alpha} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-7}{2};$$

при каком значении  $\alpha$  они перпендикулярны?

6.28. Найдите канонические уравнения прямой, проходящей через точку  $M_0(2; -3; 4)$  перпендикулярно прямым

$$\frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{1} = \frac{z+5}{1}, \quad \frac{x-8}{3} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-2}{1}.$$

6.29. Установите, пересекаются ли прямые:

$$1) \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z}{-1} \text{ и } \frac{x}{-2} = \frac{y+5}{3} = \frac{z-4}{1};$$

$$2) \frac{x-4}{-6} = \frac{y+4}{4} = \frac{z}{-2} \text{ и } \frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1}.$$

6.30. Найдите канонические уравнения прямой, лежащей в плоскости  $Oyz$ , проходящей через начало координат перпендикулярно прямой  $\frac{x-13}{8} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-4}{3}$ .

6.31. Вычислите угол между прямыми:

$$1) \frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{\sqrt{2}} \text{ и } \frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{\sqrt{2}};$$

$$2) \begin{cases} x=2t+1, \\ y=3t-2, \\ z=-6t+1 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} 2x+y-4z+2=0, \\ 4x-y-5z+4=0; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 3x-4y+3z+1=0, \\ x-6y-6z+2=0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x-2z-3=0, \\ x+2y+2z+9=0. \end{cases}$$

## § 28. Взаимное расположение прямой и плоскости

1. Условие параллельности прямой и плоскости. Прямая параллельна плоскости тогда и только тогда, когда направляющий вектор прямой ортогонален нормальному вектору плоскости (рис. 194).

Следовательно, прямая  $l$  с направляющим вектором  $\mathbf{a} = (a_1; a_2; a_3)$  параллельна плоскости  $p$  с нормальным вектором  $\mathbf{n} = (A; B; C)$  тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{n} = a_1A + a_2B + a_3C = 0. \quad (1)$$

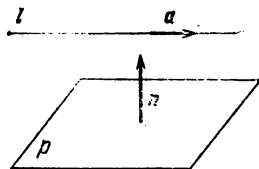


Рис. 194

Прямая лежит в плоскости, когда она параллельна плоскости и хотя бы одна ее точка принадлежит плоскости.



Поэтому, чтобы прямая

$$\frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-z_0}{a_3}$$

лежала в плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (1) и условие

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \quad (2)$$

**Задача.** При каких значениях параметров  $\alpha$  и  $\beta$  прямая

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-\alpha}{\beta}$$

параллельна плоскости  $7x - 2y + 3z - 1 = 0$ ? Когда она лежит в этой плоскости?

△ Так как  $\mathbf{a} = (3; 3; \beta)$  — направляющий вектор прямой, а  $\mathbf{n} = (7; -2; 3)$  — нормальный вектор плоскости, то прямая и плоскость параллельны, если  $\beta$  удовлетворяет уравнению

$$3 \cdot 7 - 3 \cdot 2 + 3\beta = 0.$$

Из него находим  $\beta = -5$ .

Следовательно, данные прямая и плоскость параллельны при  $\beta = -5$  и любом  $\alpha$ . При  $\beta \neq -5$  они пересекаются.

Данная прямая при  $\beta = -5$  лежит в данной плоскости, если  $\alpha$  удовлетворяет уравнению

$$7 \cdot 1 - 2 \cdot (-2) + 3 \cdot \alpha - 1 = 0,$$

из которого находим  $\alpha = -\frac{10}{3}$ .

Следовательно, данная прямая лежит в данной плоскости лишь тогда, когда  $\alpha = -\frac{10}{3}$  и  $\beta = -5$ . ▲

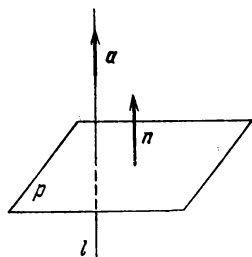


Рис. 195

**2. Условие перпендикулярности прямой и плоскости.** Прямая перпендикулярна плоскости тогда и только

тогда, когда направляющий вектор прямой коллинеарен нормальному вектору плоскости (рис. 195).

Следовательно, прямая  $l$  с направляющим вектором  $\mathbf{a} = (a_1; a_2; a_3)$  перпендикулярна плоскости  $p$  с нормальным вектором  $\mathbf{n} = (A; B; C)$  тогда и только тогда, когда

выполняется условие

$$\frac{a_1}{A} = \frac{a_2}{B} = \frac{a_3}{C}. \quad (1)$$

**Задача.** Доказать, что прямая, заданная уравнениями

$$\begin{cases} 6x + 3y - 2z - 21 = 0, \\ 6x + y + 2z - 31 = 0 \end{cases}$$

перпендикулярна плоскости

$$2x - 6y - 3z - 91 = 0.$$

△ За направляющий вектор прямой возьмем векторное произведение векторов  $\mathbf{n}_1 = (6; 3; -2)$  и  $\mathbf{n}_2 = (6; 1; 2)$ ,

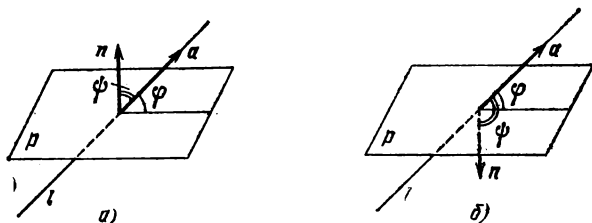


Рис. 196

т. е. нормальных векторов, задающих данную прямую. Найдем его координаты:

$$\mathbf{a} = [\mathbf{n}_1; \mathbf{n}_2] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 6 & 3 & -2 \\ 6 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 8\mathbf{i} - 24\mathbf{j} - 12\mathbf{k}.$$

Нормальный вектор  $\mathbf{n}$  данной плоскости имеет координаты  $(2; -6; -3)$ . Условие (1) перпендикулярности прямой и плоскости выполнено, так как

$$\frac{8}{2} = \frac{-24}{-6} = \frac{-12}{-3}.$$

Данные прямая и плоскость перпендикулярны. ▲

**3. Угол между прямой и плоскостью.** Рассмотрим прямую  $l$  с направляющим вектором  $\mathbf{a}$  и плоскость  $p$  с нормальным вектором  $\mathbf{n}$ . Обозначим через  $\varphi$  угол между прямой  $l$  и плоскостью  $p$ , а через  $\psi$  — угол между векторами  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{n}$ . Легко видеть, что  $\varphi = 90^\circ - \psi$ , если  $\psi \leq 90^\circ$  (рис. 196, а) и  $\varphi = \psi - 90^\circ$ , если  $\psi > 90^\circ$  (рис. 196, б). В обоих случаях справедливо равенство  $\sin \varphi = |\cos \psi|$ .

Тогда

$$\cos \varphi = \cos \angle (\mathbf{a}; \mathbf{n}) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{n}|},$$

и, следовательно,

$$\sin \varphi = \frac{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{n}|}.$$

Если известны прямоугольные декартовы координаты направляющего вектора прямой и нормального вектора плоскости  $\mathbf{a} = (a_1; a_2; a_3)$  и  $\mathbf{n} = (A; B; C)$ , то угол  $\varphi$  может быть вычислен с помощью формулы

$$\sin \varphi = \frac{|a_1 A + a_2 B + a_3 C|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (1)$$

**Задача 1.** Вычислить угол между прямой и плоскостью:

а)  $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-7}{-1}$  и  $4x + y + z + 13 = 0$ ;

б)  $\begin{cases} x = 2 - 3t, \\ y = 1 - t, \\ z = -4t \end{cases}$  и  $x + 2y - z + 1 = 0$ ;

в)  $\begin{cases} 3x - 2y + z + 1 = 0, \\ 4x - 3y + 4z = 0 \end{cases}$  и  $2x - y - 2z + 5 = 0$ .

$\Delta$  а) В данном случае  $\mathbf{a} = (2; 2; -1)$ ,  $\mathbf{n} = (4; 1; 1)$ . По формуле (1) вычисляем синус искомого угла:

$$\sin \varphi = \frac{|2 \cdot 4 + 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1|}{\sqrt{4+4+1} \sqrt{16+1+1}} = \frac{9}{3\sqrt{18}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Угол между прямой и плоскостью равен  $45^\circ$ .

б) Так как  $\mathbf{a} = (-3; -1; -4)$  и  $\mathbf{n} = (1; 2; -1)$ , то

$$\sin \varphi = \frac{|-3-2+4|}{\sqrt{9+1+16} \sqrt{1+4+1}} = \frac{1}{\sqrt{26} \sqrt{6}} = \frac{1}{2\sqrt{39}} \approx 0,08.$$

По таблице синусов находим, что  $\varphi \approx 5^\circ$ .

в) За направляющий вектор прямой возьмем векторное произведение нормальных векторов  $\mathbf{n}_1 = (3; -2; 1)$  и  $\mathbf{n}_2 = (4; -3; 4)$  плоскостей, задающих прямую. Найдем его координаты:

$$\mathbf{a} = [\mathbf{n}_1; \mathbf{n}_2] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & 4 \end{vmatrix} = -5\mathbf{i} - 8\mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

Координаты нормального вектора данной плоскости находим из ее уравнения  $\vec{n} = (2; -1; -2)$ . По формуле (1) вычисляем синус искомого угла:

$$\sin \varphi = \frac{|-10+8+2|}{\sqrt{25+64+1}\sqrt{4+1+4}} = 0.$$

Угол между прямой и плоскостью равен нулю.  $\blacktriangle$

### Вопросы для контроля

1. Как записывается условие параллельности прямой и плоскости, если прямая задана каноническими уравнениями, а плоскость — общим уравнением?

2. Как записывается условие перпендикулярности прямой и плоскости?

3. Как вычисляется угол между прямой и плоскостью, если известны направляющий вектор прямой и нормальный вектор плоскости?

### Упражнения

6.32. Исследуйте взаимное расположение следующих пар прямых и плоскостей (в случае пересечения прямой и плоскости найдите точку пересечения):

1)  $\frac{x+7}{3} = \frac{y+10}{-4} = \frac{z+3}{1}$  и  $y+4z+1=0$ ;

2)  $\begin{cases} 3x-2y+z+3=0, \\ 4x-3y+4z+1=0 \end{cases}$  и  $2x-y-2z-8=0$ ;

3)  $\begin{cases} x=12+4t, \\ y=9+3t, \\ z=1+t \end{cases}$  и  $3x+5y-z-2=0$ ;

4)  $\frac{x-2}{4} = \frac{y-7}{3} = \frac{z-5}{1}$  и  $4x+3y+z-8=0$ ;

5)  $\frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{4} = \frac{z+5}{2}$  и  $4x+y-7=0$ .

6.33. Найдите уравнение прямой, проходящей через точку  $M_0(2; 0; -1)$  перпендикулярно плоскости  $2x+3y-z+7=0$ .

6.34. Найдите уравнение плоскости, проходящей через точку  $M_0(7; 9; 11)$  перпендикулярно прямой  $\frac{x}{11} = \frac{y}{9} = \frac{z}{7}$ .

6.35. При каких значениях  $\alpha$  и  $\beta$  прямая  $\frac{x+\alpha}{8} = \frac{y-1}{\beta} = \frac{z-4}{3}$  принадлежит плоскости  $x-2y-4z+1=0$ ?

6.36. Вычислите угол между прямой и плоскостью:

1)  $\frac{x+2}{2} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+5}{0}$  и  $y+z+7=0$ ;

$$2) \begin{cases} x=7+5t, \\ y=4+t, \\ z=5+4t \end{cases} \text{ и } 3x-y+2z-5=0;$$

$$3) \begin{cases} 7x-5y+5z-11=0, \\ x-y+3z+7=0 \end{cases} \text{ и } 6x-3y-6z+13=0.$$

6.37. Найдите уравнения проекции прямой  $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-2}{2}$  на плоскость  $3x+2y-z-5=0$ .

6.38. Найдите канонические уравнения проекций прямой

$$\begin{cases} 3x-2y-z-2=0, \\ x+4y-5z-10=0 \end{cases}$$

на координатные плоскости.

## § 29. Расстояние от точки до плоскости и до прямой

**1. Расстояние от точки до плоскости.** Расстояние от точки до плоскости равно длине перпендикуляра, опущенного из этой точки на данную плоскость. Следовательно, чтобы найти расстояние  $d$  от точки  $M_0$  до плоскости  $p$ , нужно через точку  $M_0$  провести прямую  $l$ , перпендикулярную плоскости  $p$ , и найти точку пересечения  $M_1$  прямой  $l$  с плоскостью  $p$ . Тогда  $d = M_0M_1$ .

**Задача.** Найти расстояние от точки  $M_1(-3; 1; 2)$  до плоскости

$$2x + 3y + z + 8 = 0.$$

$\Delta$  Прямая  $l$ , проходящая через точку  $M_0$  перпендикулярно данной плоскости, имеет уравнения

$$\begin{cases} x = -3 + 2t, \\ y = 1 + 3t, \\ z = 2 + t. \end{cases} \quad (1)$$

Найдем координаты точки пересечения этой прямой с данной плоскостью. Для этого представим значения  $x$ ,  $y$ ,  $z$  из формул (1) в уравнение плоскости:

$$2(-3 + 2t) + 3(1 + 3t) + (2 + t) + 8 = 0.$$

Отсюда находим  $t = -\frac{1}{2}$ . Следовательно, прямая  $l$  пересекается с плоскостью в точке  $M_1\left(-4; -\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ , и поэтому

$$d = \sqrt{(-4+3)^2 + \left(-\frac{1}{2}-1\right)^2 + \left(\frac{3}{2}-2\right)^2} = \sqrt{3,5}. \quad \blacktriangle$$

Докажем, что расстояние  $d$  от точки  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  до плоскости  $p$ , заданной уравнением

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

вычисляется по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (1)$$

□ Очевидно, что расстояние  $d$  от точки  $M_0$  до плоскости  $p$  равно длине проекции отрезка  $M_0M$ , у которого  $M \in p$ , на прямую, перпендикулярную плоскости  $p$ . Следовательно,

$$d = |\text{пр}_n \overrightarrow{M_0M}|, \quad (2)$$

где  $n = (A; B; C)$ .

Получим из формулы (2) формулу (1). Имеем:

$$\begin{aligned} d = |\text{пр}_n \overrightarrow{M_0M}| &= \left| \overrightarrow{M_0M} \cdot \frac{n}{|n|} \right| = \\ &= \frac{1}{|n|} |A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0)|. \end{aligned}$$

Здесь  $x, y, z$  — координаты точки  $M$  плоскости  $p$ . Поэтому  $Ax + By + Cz + D = 0$  и

$$d = \frac{1}{|n|} |Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|,$$

а это и есть формула (1). ■

Решим сформулированную выше задачу по формуле (1):

$$d = \frac{|-6 + 3 + 2 + 8|}{\sqrt{4 + 9 + 1}} = \frac{7}{\sqrt{14}} = \sqrt{\frac{7}{2}}.$$

**2. Расстояние от точки до прямой.** Расстояние от точки до прямой равно длине перпендикуляра, опущенного из этой точки на данную прямую. Следовательно, чтобы найти расстояние  $d$  от точки  $M_0$  до прямой  $l$ , нужно через точку  $M_0$  провести плоскость  $p$ , перпендикулярную прямой  $l$ , и найти точку пересечения  $M_1$  прямой  $l$  с плоскостью  $p$ .

Тогда  $d = M_0M_1$ .

**Задача.** Найти расстояние от точки  $M_0(1; 1; 2)$  до прямой, проходящей через точки  $A(2; 3; 1)$  и  $B(1; 1; -1)$ .

△ Данная прямая имеет уравнения

$$x = 1 + t, \quad y = 1 + 2t, \quad z = -1 + 2t,$$

а плоскость, проходящая через точку  $M_0$  и перпендикулярная этой прямой, имеет уравнение

$$(x-1) \cdot 1 + (y-1) \cdot 2 + (z-2) \cdot 2 = 0.$$

Найдем точку пересечения этой плоскости с данной прямой:

$$t + 2t \cdot 2 + (-3 + 2t) \cdot 2 = 0.$$

Отсюда находим  $t = \frac{2}{3}$ . Следовательно, прямая и плоскость пересекаются в точке  $M\left(\frac{5}{3}; \frac{7}{3}; \frac{1}{3}\right)$ , и поэтому

$$d = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{5}{3}\right)^2} = \frac{1}{3} \sqrt{4+16+25} = \sqrt{5}. \blacktriangle$$

Докажем, что расстояние  $d$  от точки  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  до прямой, проходящей через точку  $M_1(x_1; y_1; z_1)$  параллельно вектору  $\mathbf{a} = (a_1; a_2; a_3)$ , вычисляется по формуле

$$d = \frac{|\overrightarrow{M_0M_1}; \mathbf{a}|}{|\mathbf{a}|}. \quad (1)$$

□ Очевидно, что

$$d = |\overrightarrow{M_0M_1}| \cdot |\sin \varphi|,$$

где  $\varphi$  — угол между векторами  $\overrightarrow{M_0M_1}$  и  $\mathbf{a}$ .

Следовательно,

$$d = \left| \left[ \overrightarrow{M_0M_1}; \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} \right] \right| = \frac{|\overrightarrow{M_0M_1}; \mathbf{a}|}{|\mathbf{a}|}. \blacksquare$$

Решим сформулированную выше задачу по формуле (1). В задаче  $\mathbf{a} = (1; 2; 2)$ ,  $M_0(1; 1; 2)$ ,  $M_1(1; 1; -1)$ . Тогда  $|\mathbf{a}| = 3$ ,

$$[\overrightarrow{M_0M_1}; \mathbf{a}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = i \cdot 6 - j \cdot 3,$$

$$|\overrightarrow{M_0M_1}; \mathbf{a}| = \sqrt{6^2 + 3^2} = 3\sqrt{5},$$

и, следовательно,  $d = \sqrt{5}$ .

**3. Расстояние между скрещивающимися прямыми.** Расстояние  $d$  между двумя скрещивающимися прямыми  $l_1$  и  $l_2$ , которые проходят соответственно через точки  $M_1$  и  $M_2$  параллельно векторам  $\mathbf{a}_1$  и  $\mathbf{a}_2$ , вычисляется по формуле:

$$d = \frac{|\overrightarrow{(M_1M_2; \mathbf{a}_1; \mathbf{a}_2)}|}{|[\mathbf{a}_1; \mathbf{a}_2]|}.$$

Эта формула следует из геометрических интерпретаций модуля смешанного произведения векторов  $\overrightarrow{M_1M_2}$ ,  $\mathbf{a}_1$  и  $\mathbf{a}_2$ , как объема соответствующего параллелепипеда, и длины векторного произведения векторов  $\mathbf{a}_1$  и  $\mathbf{a}_2$ , как площади соответствующего параллелограмма.

**Задача.** Найти расстояние между скрещивающимися прямыми

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{3}$$

и

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{1}.$$

△ Здесь  $\mathbf{a}_1 = (2; 1; 3)$ ,  $\mathbf{a}_2 = (3; 2; 1)$ ,

$$[\mathbf{a}_1; \mathbf{a}_2] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = i \cdot (-5) - j \cdot (-7) + k \cdot 1,$$

$$|[\mathbf{a}_1; \mathbf{a}_2]| = \sqrt{25 + 49 + 1} = 5\sqrt{3},$$

$$(\overrightarrow{M_1M_2}; \mathbf{a}_1; \mathbf{a}_2) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-5) - 1 \cdot (-7) = -3.$$

Следовательно,  $d = \frac{\sqrt{3}}{5}$ . ▲

#### Вопросы для контроля

1. Как можно вычислить расстояние от точки до плоскости?
2. Напишите формулу для расстояния от точки до плоскости, заданной общим уравнением.
3. Как можно вычислить расстояние от точки до прямой?
4. Напишите формулу для расстояния от точки до прямой, заданной каноническими уравнениями.
5. Напишите формулу для расстояния между двумя скрещивающимися прямыми.

#### Упражнения

6.39. Найдите расстояние от начала координат до плоскости:

- 1)  $4x - 2y - 4z + 7 = 0$ ;
- 2)  $15x + 16y - 12z - 100 = 0$ ;
- 3)  $\sqrt{2}x + y - z + 32 = 0$ .



**6.40.** Найдите расстояние от точки до плоскости:

1)  $M(1; 2; 4)$ ,  $2x + 2y - z - 11 = 0$ ;

2)  $M(7; 0; -7)$ ,  $18x - 6y + 9z + 14 = 0$ ;

3)  $M(\sqrt{5}; \sqrt{12}; 2)$ ,  $y\sqrt{3} + z + 20 = 0$ .

**6.41.** Вычислите расстояние от точки  $M(0; 1; -3)$  до плоскости, проходящей через точки  $M_1(3; 1; -5)$ ,  $M_2(8; 3; 3)$ ,  $M_3(-2; -1; 4)$ .

**6.42.** Вычислите расстояние между параллельными плоскостями:

1)  $3x - 6y - 2z + 35 = 0$  и  $6x - 12y - 4z - 5 = 0$ ;

2)  $5x + 2y - 3z - 5 = 0$  и  $10x + 4y - 6z + 5 = 0$ ;

3)  $7x - y + \sqrt{2}z - 3\sqrt{2} = 0$  и  $7\sqrt{2}x - \sqrt{2}y + 2z - 6 = 0$ .

## ПРОСТЕЙШИЕ КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ И ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

### § 30. Цилиндры и конусы

**1. Цилиндр.** Рассмотрим на плоскости  $p$  ограниченную фигуру  $D$  и некоторый вектор  $\mathbf{a}$ , не параллельный плоскости  $p$ . Тогда объединение всех отрезков  $MN$  таких, что  $M \in D$  и  $\overrightarrow{MN} = \mathbf{a}$ , называется *цилиндром с основанием  $D$*  (рис. 197). Очевидно, что множество всех точек  $N$ , которые получаются параллельным переносом точек  $M \in D$  (на вектор  $\mathbf{a}$ ), лежит в плоскости  $q$ , которая параллельна плоскости  $p$  и образует фигуру  $D'$ , равную фигуре  $D$ .

Фигуры  $D$  и  $D'$  называются *основаниями цилиндров* (нижним и верхним). Расстояние между плоскостями оснований называется *высотой цилиндра*. Отрезок перпендикуляра, проведенного из любой точки верхнего основания к плоскости нижнего основания, также называют высотой цилиндра.

Объединение всех отрезков  $MN$  таких, что точка  $M$  принадлежит границе фигуры  $D$ , образует *боковую поверхность цилиндра*; сами отрезки  $MN$  в этом случае называются *образующими* цилиндра. Боковая поверхность цилиндра и его основания образуют *полную поверхность цилиндра*.

Если основанием цилиндра является круг и образующие цилиндра перпендикулярны плоскостям оснований, то такой цилиндр называется *прямым круговым*.

Прямой круговой цилиндр можно получить вращением прямоугольника вокруг одной из его сторон (рис. 198).

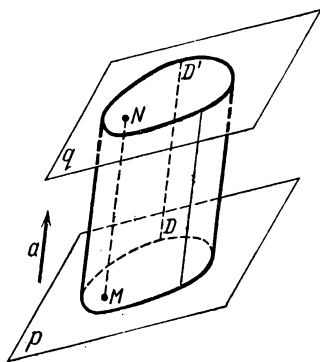


Рис. 197

Сторона прямоугольника, параллельная оси вращения и не лежащая на ней, описывает боковую поверхность, а стороны, перпендикулярные оси вращения — основания цилиндра. Ось вращения называют *осью прямого кругового цилиндра*, а сечение цилиндра плоскостью, проходящей через его ось, *осевым сечением*.

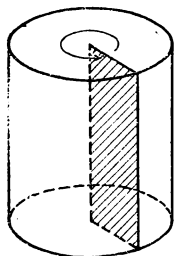


Рис. 198

Плоскость, проходящую через образующую цилиндра перпендикулярно осевому сечению, проведенному через эту образующую, называют *касательной плоскостью цилиндра*.

В общем случае основанием цилиндра может быть любая ограниченная фигура, например любой многоугольник. Поэтому любая призма является цилиндром.

Если основанием цилиндра является фигура, ограниченная эллипсом, то цилиндр называется *эллиптическим*. В частности, прямой круговой цилиндр является частным случаем эллиптического.

Призмой, *вписанной в прямой круговой цилиндр*, называют призму, у которой плоскости оснований совпадают

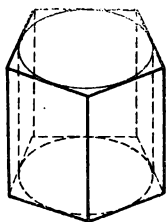
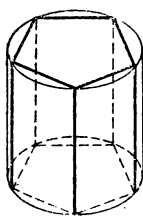


Рис. 199

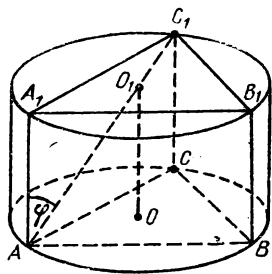


Рис. 200

с плоскостями оснований цилиндра, а боковые ребра являются образующими цилиндра. Призму называют *описанной около цилиндра*, если плоскости оснований призмы и цилиндра совпадают и боковые грани призмы касаются боковой поверхности цилиндра. На рис. 199 изображены пятиугольная призма, вписанная в цилиндр, и пятиугольная призма, описанная около цилиндра.

**Задача.** В прямой круговой цилиндр вписана правильная треугольная призма. Найти угол между диагональю ее боковой грани и осью цилиндра, если радиус основания цилиндра равен его высоте.

△ Искомый угол между осью  $OO_1$  цилиндра (рис. 200) и диагональю  $AC_1$  боковой грани призмы равен углу  $\varphi$  между диагональю  $AC_1$  и ребром  $AA_1$ , так как ось цилиндра параллельна ребру призмы. Из прямоугольного треугольника  $AA_1C_1$  находим  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1C_1}{AA_1}$ . Ребро  $A_1C_1$  является стороной правильного треугольника, вписанного в окружность радиуса  $O_1A_1$ , следовательно,  $A_1C_1 = \sqrt{3} O_1A_1$ . По условию задачи  $AA_1 = O_1A_1$ , поэтому  $\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{3}$ ,  $\varphi = 60^\circ$ . ▲

**2. Конус и усеченный конус.** Рассмотрим на плоскости  $p$  ограниченную фигуру  $D$  и некоторую точку  $S$  простран-

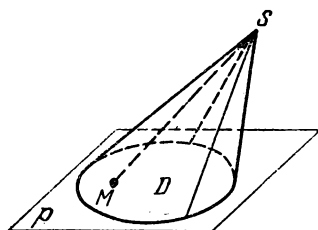


Рис. 201

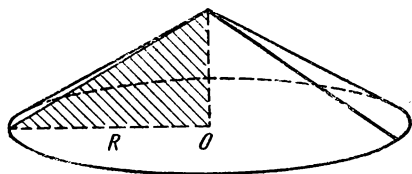


Рис. 202

ства, не лежащую в плоскости  $p$ . Объединение всех отрезков  $SM$ , где  $M \in D$ , называется *конусом с вершиной в точке  $S$  и основанием  $D$*  (рис. 201).

Отрезок перпендикуляра, проведенного через вершину конуса к плоскости основания, называется *высотой конуса*. Длина этого отрезка также называется высотой конуса.

Объединение всех отрезков  $SM$  таких, что точка  $M$  принадлежит границе фигуры  $D$ , образует *боковую поверхность конуса*; сами отрезки  $SM$  в этом случае называются *образующими конуса*. Боковая поверхность конуса и его основание образуют *полную поверхность конуса*.

Если основанием конуса является круг и вершина конуса проецируется в центр круга, то такой конус называется *прямым круговым конусом*.

Прямой круговой конус можно получить вращением прямоугольного треугольника вокруг одного из его катетов (рис. 202). Тогда гипотенуза описывает боковую поверхность, а катет, не лежащий на оси вращения, — основание конуса.

Ось вращения называют *осью прямого кругового конуса*, а сечение конуса плоскостью, проходящей через его ось, —

*осевым сечением*. Плоскость, проходящую через образующую конуса перпендикулярно осевому сечению, проведенному через эту образующую, называют *касательной плоскостью конуса*.

В общем случае основанием конуса может быть любая ограниченная фигура, например любой многоугольник. Поэтому любая пирамида является конусом.

Если основанием конуса является фигура, ограниченная эллипсом, то конус называется *эллиптическим*. Очевидно, прямой круговой конус является частным случаем эллиптического.

Рассмотрим произвольный конус (рис. 203). Через точку, принадлежащую какой-нибудь образующей конуса

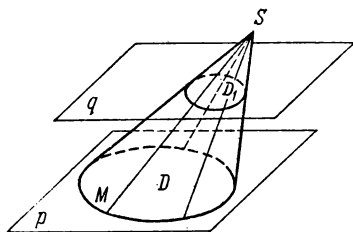


Рис. 203

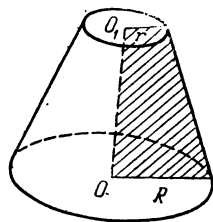


Рис. 204

и не совпадающую с ее концами, проведем плоскость  $q$ , параллельную плоскости  $p$  основания конуса. Часть конуса, заключенную между плоскостями  $p$  и  $q$ , называют *усеченным конусом*.

Фигура  $D_1$  плоскости  $q$ , являющаяся частью границы усеченного конуса, называется *верхним основанием*, а фигура  $D$  плоскости  $p$  в этом случае называется *нижним основанием*. *Высотой усеченного конуса* называется расстояние между плоскостями оснований.

Усеченный конус, который является частью прямого кругового конуса, можно получить вращением прямоугольной трапеции вокруг ее высоты  $OO_1$  (рис. 204). Боковая сторона  $AB$  описывает боковую поверхность, верхнее основание—верхнее, а нижнее—нижнее основание этого усеченного конуса.

**Задача 1.** Доказать, что если прямой круговой конус пересечь плоскостью, параллельной основанию, то площади сечения и основания будут относиться как квадраты их расстояний от вершины.

$\triangle$  Сечением прямого кругового конуса плоскостью, параллельной основанию, является круг (рис. 205). Обозначим его площадь  $S_1$ , площадь основания —  $S$ . Проведем осевое сечение конуса. В сечении получим  $\triangle ASB$ , подобный  $\triangle A_1SB_1$ . Из подобия этих треугольников находим

$$\frac{O_1A_1}{OA} = \frac{SO_1}{SO},$$

и, следовательно,

$$\frac{S_1}{S} = \frac{\pi O_1A_1^2}{\pi OA^2} = \frac{SO_1^2}{SO^2}. \blacktriangle$$

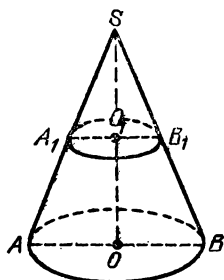


Рис. 205

Пирамидой, вписанной в прямой круговой конус, называют пирамиду, основанием которой является многоугольник, вписанный в окружность основания конуса, а вершиной — вершина конуса. Боковые ребра пирамиды,

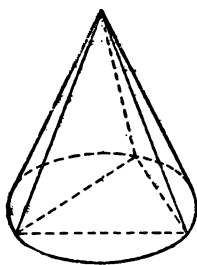


Рис. 206

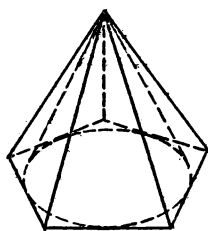


Рис. 207

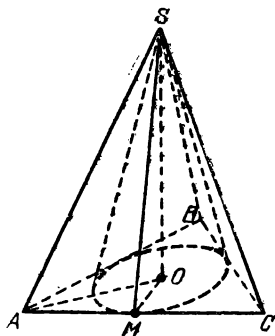


Рис. 208

вписанной в конус, являются образующими конуса. Пирамиду называют описанной около конуса, если ее основанием является многоугольник, описанный около окружности основания конуса, а вершиной — вершина конуса. Боковые грани описанной пирамиды лежат в касательных плоскостях конуса. На рис. 206 изображена треугольная пирамида, вписанная в конус, а на рис. 207 — пятиугольная пирамида, описанная около конуса.

**Задача 2.** В правильную треугольную пирамиду вписан конус. Найти радиус основания конуса, если ребро пирамиды равно  $a$  и угол между соседними боковыми ребрами равен  $\alpha$ .

△ Проведем апофему  $SM$ , центр основания  $O$  соединим с точками  $M$  и  $A$  (рис. 208). Тогда

$$AM = a \sin \frac{\alpha}{2}, \quad OA = \frac{AM}{\cos 30^\circ} = \frac{2a \sin \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}}. \quad \blacktriangle$$

### Вопросы для контроля

1. Что называется: а) цилиндром; б) его боковой поверхностью; в) высотой; г) образующей?
2. Объясните, почему любая призма является цилиндром.
3. Какой цилиндр называют прямым круговым цилиндром?
4. Как вращением плоской фигуры (какой?) можно получить прямой круговой цилиндр? Что называют осью такого цилиндра, его осевым сечением?
5. Дайте определение касательной плоскости цилиндра.
6. Какой фигурой может быть сечение прямого кругового цилиндра плоскостью, параллельной оси цилиндра?
7. В каком случае призму называют: а) вписанной в цилиндр; б) описанной около цилиндра?
8. Что называется: а) конусом; б) его боковой поверхностью; в) высотой; г) образующей?
9. Объясните, почему любая пирамида является конусом.
10. Какой конус называют прямым круговым конусом?
11. Как можно получить прямой круговой конус вращением плоской фигуры? Что такое ось прямого кругового конуса? Какое сечение такого конуса называют осевым?
12. Дайте определение касательной плоскости конуса.
13. Какой фигурой может быть сечение прямого кругового конуса плоскостью, проходящей через вершину конуса?
14. В каком случае пирамиду называют: а) вписанной в конус; б) описанной около конуса?
15. Что называется: а) усеченным конусом; б) его боковой поверхностью; в) высотой; г) образующей?

### Упражнения

- 7.1. Осевое сечение цилиндра — квадрат, площадь которого  $S$ . Найдите площадь основания цилиндра.
- 7.2. Высота цилиндра 8 дм, радиус основания 5 дм. Цилиндр пересечен плоскостью так, что в сечении получился квадрат. Найдите расстояние от этого сечения до оси цилиндра.
- 7.3. Радиус основания цилиндра  $R$ , высота  $H$ , площадь сечения, параллельного оси, равна  $S$ . На каком расстоянии от оси находится плоскость сечения?
- 7.4. Высота прямого цилиндра  $H$ , диаметр основания  $d$  ( $H \leq d$ ). На каком расстоянии от оси нужно провести плоскость, чтобы сечением являлся квадрат?

7.5. Площадь основания цилиндра относится к площади осевого сечения как 5:6. Определите угол между диагоналями осевого сечения.

7.6. В цилиндр вписана правильная шестиугольная призма. Найдите угол между диагональю ее боковой грани и осью цилиндра, если радиус основания равен высоте цилиндра.

7.7. Высота прямого кругового конуса равна 4 см, диаметр основания 6 см. Найдите образующую конуса.

7.8. Высота прямого кругового конуса 20 см, радиус его основания 25 см. Найдите площадь сечения, проведенного через вершину, если расстояние от него до центра основания конуса равно 12 см.

7.9. Дан прямой круговой конус, высота которого равна 10 см, а площадь основания равна  $25 \text{ см}^2$ . Определите площадь сечения, параллельного основанию и удаленного от основания на 3 см.

7.10. Площадь осевого сечения прямого кругового конуса равна  $S$ , а площадь сечения, проведенного через середину высоты параллельно основанию конуса, равна  $Q$ . Найдите угол между образующей и плоскостью основания конуса.

7.11. Высота правильной треугольной пирамиды равна 4 см, а угол между соседними боковыми ребрами —  $60^\circ$ . Найдите радиус основания конуса, вписанного в пирамиду.

7.12. Диаметры оснований прямого кругового усеченного конуса равны 6 см и 12 см, высота 4 см. Найдите образующую конуса.

7.13. Радиусы оснований прямого усеченного конуса равны 10 см и 6 см, а образующая наклонена к плоскости основания под углом  $60^\circ$ . Найдите высоту конуса.

7.14. Через середину высоты прямого кругового усеченного конуса проведена плоскость, параллельная основаниям. Найдите площадь сечения, если площади оснований равны: 1)  $16 \text{ см}^2$  и  $4 \text{ см}^2$ ; 2)  $S$  и  $Q$ .

## § 31. Шар и сфера

**1. Определения и основные свойства.** Множество всех точек пространства, расстояние которых от данной точки  $O$  не превосходит данного положительного числа  $R$ , называется *шаром радиуса  $R$  с центром в точке  $O$* .

Множество всех точек пространства, находящихся на расстоянии  $R > 0$  от данной точки  $O$ , называется *сферой радиуса  $R$  с центром в точке  $O$* .

Сфера радиуса  $R$  с центром в точке  $O$  называется *поверхностью соответствующего шара*. Про нее говорят, что она ограничивает шар радиуса  $R$  с центром в точке  $O$ .

Все точки шара, не принадлежащие его поверхности, называются внутренними точками шара. Отрезок, соединяющий центр шара с любой точкой его поверхности, также называют радиусом шара. Отрезок, соединяющий две любые точки поверхности шара, называется хордой. Хорда, проходящая через центр шара, называется диаметром шара. Длина диаметра равна удвоенной длине радиуса. Хорды



и диаметры шара называют хордами и диаметрами ограничивающей его сферы. На рис. 209 изображен шар радиуса  $R$  с центром в точке  $O$  и три точки  $A, B, M$ , лежащие на его поверхности;  $OA, OB, OM$  — радиусы,  $AB$  — диаметр.

Шар можно получить вращением полукруга вокруг оси, проходящей через диаметр полукруга; при этом ограничивающая шар сфера получается при вращении полуокружности (рис. 210).

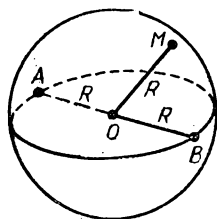


Рис. 209

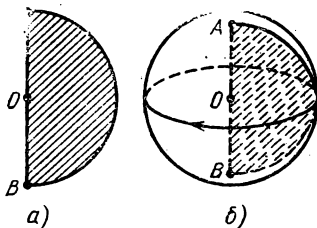


Рис. 210

**Теорема 1.** *Через любые четыре точки, не лежащие в одной плоскости, проходит, и притом единственная, сфера.*

□ Пусть  $A, B, C, D$  — четыре точки, не лежащие в одной плоскости. Достаточно доказать, что существует, и притом единственная, точка  $O$ , равноудаленная от четырех данных точек. Очевидно, точка  $O$  и будет центром сферы, проходящей через данные точки.

Через точки  $A, B, C$ , которые не лежат на одной прямой, проходят единственная плоскость и единственная окружность. Пусть  $O_1$  — центр этой окружности. Множество всех точек пространства, равноудаленных от трех точек  $A, B, C$ , — это прямая  $l$ , перпендикулярная плоскости  $p$ , проходящей через точку  $O_1$  (рис. 211).

Рассмотрим теперь точки  $A$  и  $D$ . Множество всех точек пространства, равноудаленных от точек  $A$  и  $D$ , — это плоскость  $q$ , перпендикулярная прямой  $AD$  и проходящая через середину отрезка  $AD$ . Плоскость  $q$  обязательно пересечет прямую  $l$ , так как точка  $D$  не лежит в плоскости  $p$ . Очевидно, что точка  $O$ , являющаяся пересечением плоскости  $q$  с прямой  $l$ , будет равноудаленной от всех четырех данных точек  $A, B, C, D$ . Из построения видно, что точка  $O$  — единственная точка пространства, удовлетворяющая этому условию. ■

Пусть заданы плоскость  $p$  и сфера радиуса  $R$  с центром в точке  $O$ . Исследуем их взаимное расположение в пространстве.

Через точку  $O$  проведем прямую  $l$ , перпендикулярную плоскости  $p$ . Пусть  $O_1$  — точка пересечения прямой  $l$  с плоскостью  $p$ .

Если  $OO_1 > R$ , то сфера не имеет общих точек с плоскостью  $p$  (рис. 212), так как точка  $O_1$  лежит вне шара

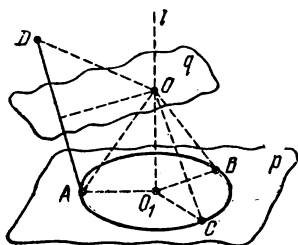


Рис. 211

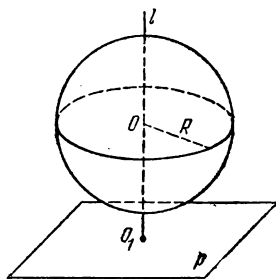


Рис. 212

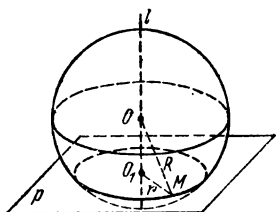


Рис. 213

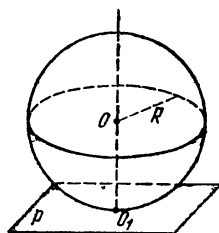


Рис. 214

радиуса  $R$  и центром в точке  $O$ , а другие точки плоскости отстоят от точки  $O$  дальше, чем точка  $O_1$ .

Если  $OO_1 < R$ , то плоскость  $p$  пересекает сферу по окружности (рис. 213) с центром в точке  $O_1$  и радиусом

$$r = \sqrt{R^2 - OO_1^2}.$$

Действительно, если  $M$  — произвольная точка, принадлежащая плоскости  $p$  и сфере, то из прямоугольного  $\triangle OO_1M$  получаем

$$O_1M = \sqrt{OM^2 - OO_1^2} = \sqrt{R^2 - OO_1^2} = r.$$

Наконец, если  $OO_1 = R$ , то плоскость  $p$  со сферой имеет одну общую точку — точку  $O_1$  (рис. 214).

Плоскость, имеющая со сферой (с шаром) только одну общую точку, называется *касательной плоскостью* к этой сфере (к этому шару), а их общая точка — *точкой касания*.

**Теорема 2.** *Если плоскость проходит через точку сферы и перпендикулярна диаметру сферы, проходящему через эту точку, то плоскость является касательной к сфере.*

□ Действительно, если плоскость проходит через некоторую точку сферы перпендикулярно диаметру сферы, проходящему через эту точку, то другой общей точки плоскость и сфера не имеют. Предположим противное. Пусть  $M$  — некоторая точка плоскости  $p$ , отличная от точки  $O_1$ ; тогда  $OM > OO_1 = R$ , и поэтому точка  $M$  не принадлежит сфере. ■

Сфера называется *вписанной* в многогранник (призму, пирамиду), если все грани многогранника лежат в касательных плоскостях сферы.

Сфера называется *описанной* около многогранника, если все его вершины принадлежат сфере.

**Задача.** Все плоские углы при вершине  $S$  пирамиды  $SABC$  прямые, боковые ребра  $SA$ ,  $SB$ ,  $SC$  равны соответственно  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Найти радиус сферы, описанной около пирамиды.

△ Согласно теореме 1 около любой треугольной пирамиды можно описать сферу. Для нахождения ее центра нужно найти точку  $O$ , одинаково удаленную от всех вершин пирамиды. Для того чтобы точка  $O$  была одинаково удалена от вершин  $A$ ,  $B$  и  $S$ , она должна лежать на прямой  $l$ , проходящей через середину  $O_1$  гипотенузы  $AB$  треугольника  $ASB$  и перпендикулярной плоскости этого треугольника (рис. 215). Поскольку точка  $O$  одинаково удалена от вершин  $S$  и  $C$ , она должна лежать в плоскости  $p$ , проходящей перпендикулярно ребру  $SC$  через его середину — точку  $M$ . Так как

$$SO_1 = AO_1 = \frac{1}{2} AB = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}; \quad OO_1 = SM = \frac{c}{2},$$

то из прямоугольного треугольника  $SO_1O$  находим радиус сферы

$$R = OS = \sqrt{SO_1^2 + OO_1^2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{2}. \quad \blacktriangle$$

**2. Уравнение сферы.** По определению сфера радиуса  $R > 0$  с центром в точке  $O$  — это множество всех точек  $M$  пространства, удовлетворяющих условию

$$OM = R. \quad (1)$$

Если в пространстве задана некоторая прямоугольная декартова система координат и  $(a; b; c)$  — координаты точки  $O$ , а  $(x; y; z)$  — координаты точки  $M$  (рис. 216), то условие (1) принимает вид

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} = R$$

или

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2. \quad (2)$$

Уравнение (2) называют *общим уравнением сферы* или *уравнением сферы радиуса  $R$  с центром в точке  $(a; b; c)$* .

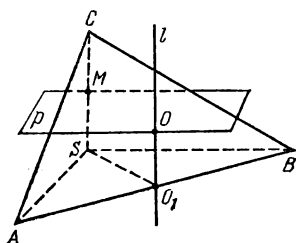


Рис. 215

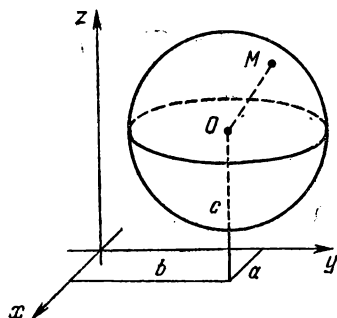


Рис. 216

В частности, сфера радиуса  $R$  с центром в начале координат имеет уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2. \quad (3)$$

Заметим, что при  $R=0$  уравнению (2) удовлетворяет только одна точка  $O(a; b; c)$ .

**Задача 1.** Составить уравнение сферы радиуса  $R=5$  с центром в начале координат.

△ Непосредственной подстановкой значения радиуса в уравнение (3) получим

$$x^2 + y^2 + z^2 = 25. \quad \blacktriangle$$

**Задача 2.** Написать уравнение сферы с центром в точке  $O(2; -3; 5)$  и радиусом, равным 6.

△ Подставив значение координат точки  $O$  и значение радиуса в уравнение (2), получим

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-5)^2 = 36. \quad \blacktriangle$$

**Задача 3.** Найти центр и радиус сферы

$$(x+4)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 100.$$

△ Сравнивая данное уравнение с уравнением сферы (2), видим, что  $a = -4$ ,  $b = 3$ ,  $c = 0$ ,  $R = 10$ . Следовательно,  $O(-4; 3; 0)$ ,  $R = 10$ . ▲

Задача 4. Доказать, что уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 5 = 0$$

является уравнением сферы. Найти ее центр и радиус.

△ Преобразуем левую часть данного уравнения, выделив квадраты двучленов, содержащих соответственно  $x$ ,  $y$ ,  $z$ :

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + y^2 + 4y + z^2 - 6z + 5 &= \\ &= (x-1)^2 - 1 + (y+2)^2 - 4 + (z-3)^2 - 9 + 5 = \\ &= (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 - 9. \end{aligned}$$

Следовательно, данная поверхность имеет уравнение

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 9.$$

Это уравнение представляет собой уравнение сферы с центром в точке  $O(1; -2; 3)$  и радиусом  $R = 3$ . ▲

Задача 5. Как расположены плоскости, заданные уравнениями  $x = 3$ ,  $x = 5$  и  $x = 7$  по отношению к сфере

$$x^2 + y^2 + z^2 = 25?$$

△ Данная сфера—это сфера радиуса  $R = 5$  с центром в начале координат  $O(0; 0; 0)$ .

Первая плоскость отстоит от центра сферы на расстоянии  $d = 3$ . Следовательно, она пересекает сферу по окружности радиуса  $r = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$  с центром в точке  $(3; 0; 0)$ .

Вторая плоскость отстоит от центра сферы на  $d = 5$ . Следовательно, она касается сферы в точке  $(5; 0; 0)$ .

Третья плоскость отстоит от центра сферы на  $d = 7 > R$ . Следовательно, она со сферой не имеет общих точек. ▲

Задача 6. Плоскость  $y = 3$  пересекает сферу

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z = 16$$

по некоторой окружности. Найти ее радиус и центр.

△ Преобразовав уравнение сферы к виду

$$(x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 18,$$

видим, что данная сфера—это сфера радиуса  $R = \sqrt{18}$  с центром в точке  $(1; 0; -1)$ .

Плоскость  $y = 3$  отстоит от центра сферы на расстоянии  $d = 3$ . Следовательно, она пересекает сферу по окружности радиуса  $r = \sqrt{18 - 9} = 3$  с центром в точке  $(1; 3; -1)$ . ▲

**Задача 7.** Точки  $A(2; -3; 5)$  и  $B(4; 1; -3)$  являются концами диаметра сферы. Написать ее уравнение и найти радиус.

$\Delta$  Центр сферы лежит на середине диаметра. По формулам (5) § 25 находим

$$a = \frac{2+4}{2} = 3, \quad b = \frac{-3+1}{2} = -1, \quad c = \frac{5-3}{2} = 1.$$

Искомое уравнение имеет вид

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = R^2.$$

Точка  $A$  лежит на сфере, поэтому ее координаты удовлетворяют уравнению сферы. Подставляя координаты точки  $A$  в уравнение сферы, получаем

$$(2-3)^2 + (-3+1)^2 + (5-1)^2 = R^2, \quad R^2 = 21.$$

Следовательно,  $(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 21$  — уравнение сферы, а  $R = \sqrt{21}$  — ее радиус.  $\blacktriangle$

### Вопросы для контроля

1. Дайте определение: а) шара; б) сферы; в) диаметра шара.
2. Вращением какой плоской фигуры можно получить: а) шар; б) сферу?
3. Можно ли провести сферу через любые четыре точки пространства?
4. Какие фигуры могут получиться при пересечении: а) шара и плоскости; б) двух сфер?
5. Какая плоскость называется касательной плоскостью сферы?
6. В каком случае говорят, что сфера: а) вписана в многогранник; б) описана около многогранника?
7. Всегда ли можно описать сферу около прямой треугольной призмы? Во всякую ли прямую треугольную призму можно вписать сферу?
8. Как записывается общее уравнение сферы?
9. Какое множество точек пространства задается уравнением

$$(x-1)^2 + y^2 + z^2 = a, \quad a \in \mathbb{R}?$$

### Упражнения

- 7.15. Шар, радиус которого 41 дм, пересечен плоскостью на расстоянии 9 дм от центра. Найдите площадь сечения.
- 7.16. Радиус земного шара  $R \approx 6370$  км. Определите длину:
  - 1) экватора;
  - 2) длину полярного круга Земли (широта  $\approx 67^\circ$ );
  - 3) длину параллели, на которой находится Москва ( $\approx 56^\circ$  северной широты).

7.17. Из точки  $M$ , взятой на сфере радиусом 30 см, проведены две взаимно перпендикулярные хорды  $MA$  и  $MB$  длиной 24 см и 10 см. На каком расстоянии от центра сферы находится хорда  $AB$ ?

7.18. Радиусы шаров равны 25 дм и 29 дм, а расстояние между их центрами 36 дм. Найдите длину окружности, по которой пересекаются их поверхности.

7.19. Найдите радиус шара, вписанного в:

- 1) куб;
- 2) правильный тетраэдр;
- 3) правильный октаэдр (ребро многогранника равно  $a$ ).

7.20. Найдите радиус сферы, описанной около:

- 1) куба;
- 2) правильного тетраэдра;
- 3) правильного октаэдра (ребро многогранника равно  $a$ ).

7.21. Найдите радиус шара, вписанного в пирамиду, основанием которой служит треугольник со сторонами 13 см, 14 см и 15 см; вершина пирамиды удалена от каждой стороны основания на 5 см.

7.22. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна  $b$ , а плоский угол при вершине —  $\alpha$ . Найдите радиусы  $r$  и  $R$  вписанного и описанного шаров.

7.23. В цилиндр, вписанный в сферу, вписана сфера. Найдите отношение радиусов сфер.

7.24. В конус, вписанный в сферу, вписана сфера. Найдите отношение радиусов сфер, если образующая конуса наклонена к плоскости его основания под углом  $\alpha$ .

7.25. Напишите уравнение сферы с центром в начале координат и радиусом  $R = 6$ .

7.26. Точка  $M(-2; 2; 1)$  лежит на сфере, а центр сферы находится в начале координат. Составьте уравнение сферы.

7.27. Дана сфера  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$  и три точки:  $A(2; -1; 1)$ ,  $B(2; 2; -1)$ ,  $C(-1; -2; 6)$ . Установите, какая из этих точек находится внутри сферы, лежит на сфере, находится вне сферы.

7.28. Найдите центр и радиус сфер:

- 1)  $x^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 81$ ;
- 2)  $(x-2)^2 + (y+4)^2 + (z-1)^2 = 72$ .

7.29. Докажите, что следующие уравнения являются уравнениями сфер:

- 1)  $x^2 + y^2 + 2y + z^2 + z - 1 = 0$ ;
- 2)  $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 4y + 2z - 43 = 0$ .

7.30. Какая фигура является пересечением сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  и плоскости:

- 1)  $y = 1$ ;
- 2)  $y = \frac{1}{2}$ ;
- 3)  $y = 2$ ?

7.31. Какая фигура является пересечением сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = 10$  и плоскости  $z = 1$ ?

7.32. Плоскость  $z = -1$  пересекает сферу  $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25$  по некоторой окружности. Найдите ее центр и радиус.

7.33. Центр сферы находится на плоскости  $z = 4$ , а сама сфера касается плоскости  $Oxy$  в точке  $M(2; 3; 0)$ . Составьте уравнение сферы и определите координаты ее центра.

7.34. Точки  $A(3; -5; 6)$  и  $B(5; 7; -1)$  являются концами одного из диаметров сферы. Составьте уравнение этой сферы.

7.35. Даны точки  $A(2; -5; 8)$ ,  $B(8; -2; 5)$ ,  $C(5; -8; 2)$  и  $D(-2; -8; -5)$ . Составьте уравнение сферы, если известно, что эти точки лежат на ее поверхности.

7.36. Найдите координаты точки, симметричной центру сферы  $(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 24$  относительно касательной плоскости к сфере в точке  $M(-1; 0; 3)$ .

7.37. Точки  $A(7; -2; 4)$  и  $B(9; -8; 6)$  лежат на поверхности сферы и на прямой, проходящей через ее центр. Составьте уравнение сферы.

## § 32\*. Простейшие криволинейные поверхности

### 1. Поверхности вращения.

1) Пусть в плоскости  $p$  задана кривая  $L$  и некоторая прямая  $l$ . Поверхность, которая получается вращением кривой  $L$  вокруг прямой  $l$ , называется *поверхностью вращения*. Прямая  $l$  называется осью поверхности вращения.

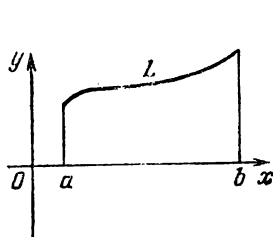


Рис. 217

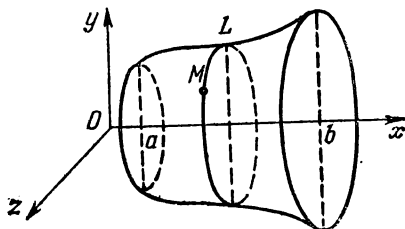


Рис. 218

Пусть кривая  $L$  лежит в плоскости  $Oxy$  (рис. 217) и имеет уравнение

$$y = f(x), \quad x \in [a; b]. \quad (1)$$

Найдем уравнение поверхности, которая получится вращением кривой  $L$  вокруг оси  $Ox$  (рис. 218). Очевидно, точка  $M$  с координатами  $(x; y; z)$ , где  $x \in [a; b]$ , принадлежит искомой поверхности вращения тогда и только тогда, когда

$$\sqrt{y^2 + z^2} = |f(x)|.$$

Таким образом, уравнение поверхности, полученной вращением кривой (1) вокруг оси  $Ox$ , имеет вид

$$y^2 + z^2 = (f(x))^2, \quad x \in [a; b]. \quad (2)$$

Заметим, что уравнение (2) получается из уравнения (1) следующим образом: обе части уравнения (1) возводятся в квадрат и  $y^2$  заменяется на  $y^2 + z^2$ .



В частности, если кривая  $L$  задана уравнением

$$y^2 = F(x), \quad (3)$$

то уравнение поверхности, полученной вращением этой кривой вокруг оси  $Ox$ , имеет вид

$$y^2 + z^2 = F(x), \quad (4)$$

т. е. просто  $y^2$  заменяется на  $y^2 + z^2$ .

2) Поверхность, которая получается вращением эллипса вокруг одной из его осей, называется *эллипсоидом вращения*.

Пусть в плоскости  $Oxy$  эллипс задан уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (5)$$

Составим уравнение поверхности, полученной вращением его вокруг оси  $Ox$ . Уравнение эллипса (5) приводится к

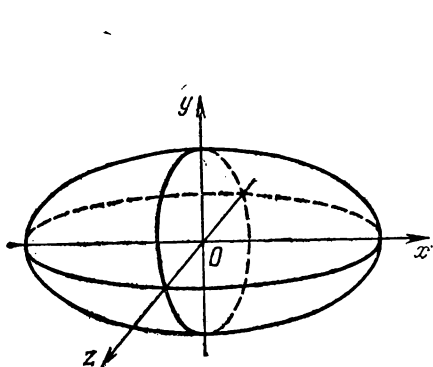


Рис. 219

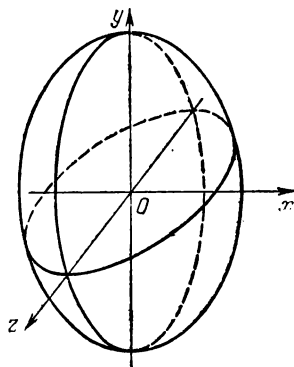


Рис. 220

виду (3), следовательно, для получения уравнения эллипсоида вращения достаточно в уравнении (5)  $y^2$  заменить на  $z^2 + y^2$ . После замены получим

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1. \quad (6)$$

Это уравнение обычно записывают так:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

При  $a > b$  уравнение (6) определяет эллипсоид вращения, вытянутый вдоль оси  $Ox$  (рис. 219), при  $a < b$  уравнение (6) определяет эллипсоид вращения, сжатый вдоль оси  $Ox$  (рис. 220), а при  $a = b$  оно определяет сферу.

Задача 1. Эллипс с полуосями  $a=4$  и  $b=6$  и центром в начале координат вращается вокруг своей малой оси, совпадающей с осью  $Ox$ . Составить уравнение поверхности вращения.

△ Составим уравнение данного эллипса:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1.$$

Заменив в этом уравнении  $y^2$  на  $y^2 + z^2$ , получим искомое уравнение эллипсоида вращения:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2 + z^2}{36} = 1 \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} + \frac{z^2}{36} = 1. \quad \blacktriangle$$

3) Поверхность, которая получается вращением гиперболы вокруг одной из ее осей, называется *гиперboloидом вращения*. При вращении гиперболы вокруг ее действительной оси получается *двуполостный гиперboloид вращения* (рис. 221), а при вращении гиперболы вокруг

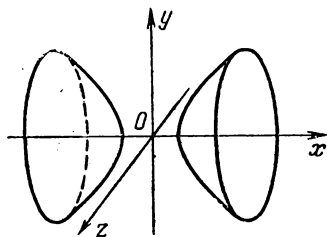


Рис. 221

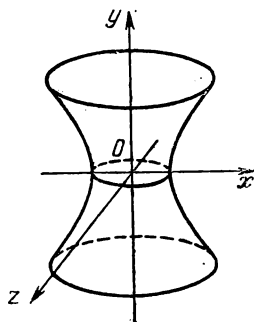


Рис. 222

ее мнимой оси получается *однополостный гиперboloид вращения* (рис. 222).

Пусть в плоскости  $Oxy$  гипербола задана уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (7)$$

Составим уравнение поверхности, полученной вращением гиперболы вокруг ее действительной оси  $Ox$ . Уравнение гиперболы (7) приводится к виду (3); следовательно, для получения уравнения поверхности двуполостного гиперboloида вращения достаточно в уравнении гипер-

болы (7)  $y^2$  заменить на  $y^2 + z^2$ . После замены получим

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1. \quad (8)$$

Для получения уравнения поверхности однополостного гиперболоида нужно в уравнении (7)  $x^2$  заменить на  $x^2 + z^2$ ; после замены получим

$$\frac{x^2 + z^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (9)$$

**Задача 2.** Гипербола с полуосями  $a=3$  и  $b=4$  вращается вокруг своей мнимой оси, совпадающей с осью  $Oy$ . Центр гиперболы совпадает с началом координат. Составить уравнение поверхности вращения.

△ Составим уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1.$$

Чтобы получить уравнение гиперболоида вращения, в уравнении гиперболы заменить  $x^2$  на  $x^2 + z^2$ . После замены получим

$$\frac{x^2 + z^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

или

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1. \quad \blacktriangle$$

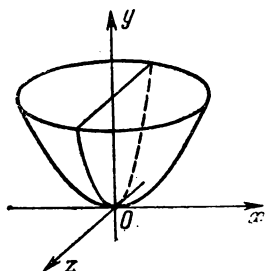


Рис. 223

4) Поверхность, которая получается вращением параболы вокруг ее оси симметрии, называется *параболоидом вращения* (рис. 223).

Пусть на плоскости  $Oxy$  параболы задана уравнением

$$x^2 = 2py. \quad (10)$$

Для получения уравнения поверхности вращения нужно в уравнении (10) заменить  $x^2$  на  $x^2 + z^2$ ; после замены получим

$$x^2 + z^2 = 2py.$$

Отметим одно замечательное свойство этой поверхности. Если внутреннюю поверхность параболоида вращения сделать зеркальной, а в ее фокусе (фокусом параболоида вращения называется фокус вращаемой параболы) поместить источник света, то все лучи света, отражаясь

от поверхности параболоида, пойдут параллельно оси параболоида.

Это свойство широко используется при изготовлении светоотражающих устройств (прожекторов, фар автомобиля, кинопроекторов и других приборов).

**Задача 3.** Составить уравнение поверхности, полученной вращением параболы  $y^2 = 2x$  вокруг оси  $Ox$ .

△ Чтобы составить уравнение параболоида вращения, полученного вращением параболы вокруг оси  $Ox$ , нужно

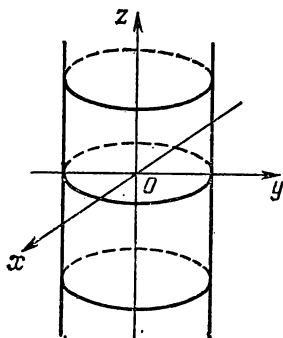


Рис. 224

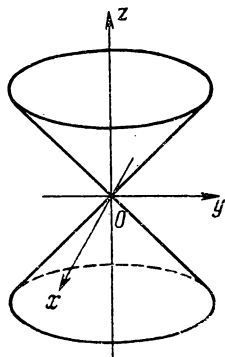


Рис. 225

в уравнении  $y^2 = 2x$  заменить  $y^2$  на  $y^2 + z^2$ , после замены получим

$$y^2 + z^2 = 2x. \blacktriangle$$

5) Если вращать прямую, параллельную какой-либо оси координат, вокруг этой оси, то получится *круговая цилиндрическая поверхность*.

Пусть дана прямая, лежащая в плоскости  $Oyz$  и имеющая уравнение  $y = a$ . Легко видеть, что поверхность вращения этой прямой вокруг оси  $Oz$  имеет уравнение

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Эта цилиндрическая поверхность изображена на рис. 224.

**Задача 4.** Составить уравнение цилиндрической поверхности, полученной вращением прямой  $y = 3$ , лежащей в плоскости  $Oxy$  вокруг оси  $Ox$ .

△ В уравнении  $y^2 = 3^2$  заменим  $y^2$  на  $y^2 + z^2$ , в результате получим  $y^2 + z^2 = 9$ .  $\blacktriangle$

6) Пусть дана прямая, лежащая в плоскости  $Oyz$  и проходящая через начало координат:

$$y = kz, \quad k \neq 0.$$

Очевидно, уравнение поверхности вращения этой прямой вокруг оси  $Oz$  имеет вид

$$x^2 + y^2 = k^2 z^2.$$

Полученное уравнение является уравнением искомой поверхности вращения, которая называется *круговой конической поверхностью* (рис. 225).

**Задача 5.** Составить уравнение поверхности, получающейся при вращении прямой  $2x = 3y$ ,  $z = 0$  вокруг оси  $Ox$ .

△ Из уравнения  $3y = 2x$ , используя формулу (2), находим  $9(y^2 + z^2) = 4x^2$ . Это и есть искомое уравнение. ▲

**2. Цилиндрические поверхности.** Если через каждую точку кривой  $L$  провести прямую параллельно данному вектору  $\alpha$ , то получим поверхность, которая называется *цилиндрической поверхностью*. Прямые, параллельные вектору  $\alpha$  и принадлежащие цилиндрической поверхности, называются *образующими* этой поверхности, а кривая  $L$  называется *направляющей* цилиндрической поверхности (рис. 226).

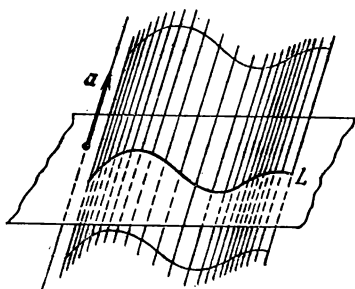


Рис. 226

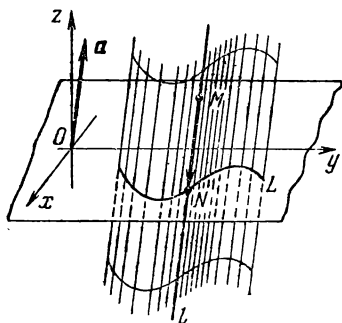


Рис. 227

Если в сечении цилиндрической поверхности плоскостью перпендикулярной ее образующим, (в *нормальном сечении*) получается окружность, то цилиндрическая поверхность называется *круговой*. Если в сечении получается эллипс, то цилиндрическую поверхность называют *эллиптической*, если гипербола — *гиперболической*, если парабола — *параболической*.

Пусть в пространстве дана прямоугольная система координат  $Oxyz$ , и пусть в плоскости  $Oxy$  дана кривая  $L$ ,

уравнение которой в этой плоскости имеет вид

$$F(x; y) = 0. \quad (1)$$

Составим уравнение цилиндрической поверхности с образующими, параллельными вектору  $\mathbf{a} = (\alpha; \beta; \gamma)$ ,  $\gamma \neq 0$ , если за направляющую принята кривая  $L$  (рис. 227).

Рассмотрим произвольную точку этой поверхности  $M(x; y; z)$ . Образующая  $l$ , проходящая через точку  $M$ , пересечет плоскость  $Oxy$  в точке  $N$ , лежащей на кривой  $L$ . Если координаты точки  $N$  в пространстве обозначить  $(x_1; y_1; 0)$ , то вектор  $\overrightarrow{MN}$  имеет координаты  $(x_1 - x; y_1 - y; 0 - z)$ .

По определению цилиндрической поверхности векторы  $\mathbf{a}$  и  $\overrightarrow{MN}$  коллинеарны, т. е.

$$\overrightarrow{MN} = \lambda \mathbf{a};$$

следовательно, имеем систему уравнений

$$x_1 - x = \lambda \alpha, \quad y_1 - y = \lambda \beta, \quad 0 - z = \lambda \gamma.$$

Решив эту систему уравнений относительно  $\lambda$ ,  $x_1$  и  $y_1$ , получим

$$\lambda = -\frac{z}{\gamma}, \quad x_1 = x - z \frac{\alpha}{\gamma}, \quad y_1 = y - z \frac{\beta}{\gamma}. \quad (2)$$

Так как точка  $N$  лежит на кривой  $L$ , то  $F(x_1; y_1) = 0$ . Заменяя  $x_1$  и  $y_1$  по формулам (2), получим уравнение

$$F\left(x - z \frac{\alpha}{\gamma}; y - z \frac{\beta}{\gamma}\right) = 0, \quad (3)$$

которое, очевидно, и будет уравнением данной цилиндрической поверхности.

**Задача 1.** Составить уравнение цилиндрической поверхности, у которой направляющая лежит в плоскости  $Oxy$  и имеет уравнение  $x^2 + y^2 = 4$ , а образующие параллельны вектору  $\mathbf{a} = (0; 1; 1)$ .

△ Так как, согласно условию задачи  $F(x; y) = x^2 + y^2 - 4$  и  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 1$ , то в силу формулы (3) уравнение данной цилиндрической поверхности имеет вид

$$\left(x - z \cdot \frac{0}{1}\right)^2 + \left(y - z \cdot \frac{1}{1}\right)^2 - 4 = 0$$

или, окончательно,

$$x^2 + (y - z)^2 - 4 = 0.$$

Эта поверхность изображена на рис. 228. ▲

Аналогично можно показать, что если направляющая цилиндрической поверхности  $L$  лежит в плоскости  $Oxz$  и определяется уравнением  $F(x; z) = 0$ , а вектор  $\mathbf{a}$  не

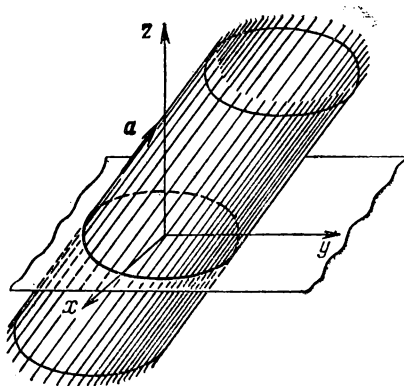


Рис. 228

параллелен этой плоскости, то цилиндрическая поверхность имеет уравнение

$$F\left(x - y \frac{\alpha}{\beta}; z - y \frac{\gamma}{\beta}\right) = 0.$$

Наконец, если  $L$  определяется уравнением  $F(y; z) = 0$  и вектор  $\mathbf{a}$  не параллелен плоскости  $Oyz$ , то уравнение цилиндрической поверхности имеет вид

$$F\left(y - x \frac{\beta}{\alpha}; z - x \frac{\gamma}{\alpha}\right) = 0.$$

Отметим, что если направляющая цилиндрической поверхности лежит в плоскости  $Oxy$ , а образующие параллельны оси  $Oz$ , то уравнение цилиндрической поверхности в пространстве совпадает с уравнением направляющей и имеет вид

$$F(x; y) = 0. \quad (4)$$

Уравнение (4), как уравнение множества точек плоскости, определяет кривую  $L$ , в то же самое время уравнение (4), как уравнение множества точек пространства, определяет цилиндрическую поверхность.

Итак, каждое из уравнений

$$F(x; y) = 0, \quad F(x; z) = 0, \quad F(y; z) = 0$$

можно истолковать двояко: если это уравнение множества точек плоскости, то это уравнение линии  $L$ , лежащей в плоскости своих переменных; если же это уравнение множества точек пространства, то каждое из этих уравнений определяет цилиндрическую поверхность с направляющей  $L$  и образующими, параллельными оси отсутствующей переменной.

Рассмотрим несколько примеров.

### 1) Уравнение

$$x^2 + y^2 = r^2$$

на плоскости  $Oxy$  определяет окружность с центром в начале координат и радиусом  $r$  (рис. 229, а). Это же

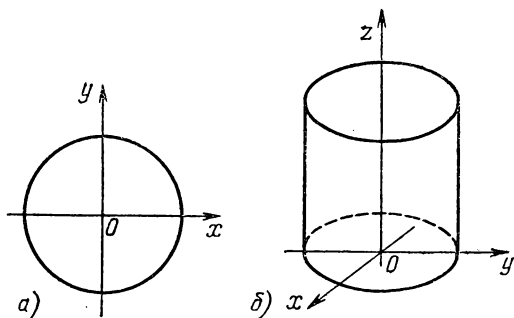


Рис. 229

уравнение в пространстве определяет круговую цилиндрическую поверхность, направляющей которой является окружность, лежащая в плоскости  $Oxy$ , а образующие параллельны оси  $Oz$  (рис. 229, б).

### 2) Уравнение

$$x^2 + z^2 = 4$$

на плоскости  $Oxz$  определяет окружность с центром в начале координат и радиусом  $r=2$  (рис. 230, а). Это же уравнение в пространстве определяет круговую цилиндрическую поверхность, направляющей которой является окружность, лежащая в плоскости  $Oxz$ , а образующие параллельны оси  $Oy$  (рис. 230, б).

### 3) Уравнение

$$y^2 + z^2 + 9 = 0$$

и на плоскости, и в пространстве определяет пустое множество, так как не существует точки, координаты которой удовлетворяли бы этому уравнению.



#### 4) Уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

на плоскости  $Oxy$  определяет эллипс с центром в начале

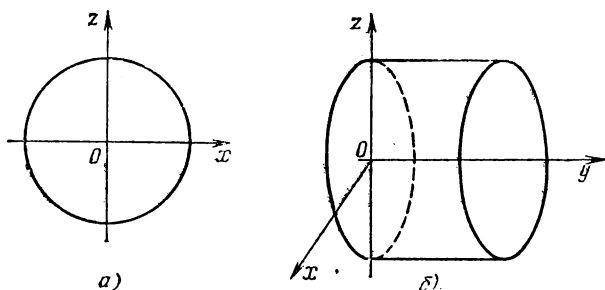


Рис. 230

координат и полуосями  $a$  и  $b$  (рис. 231, а). Это же уравнение в пространстве определяет эллиптическую цилинд-

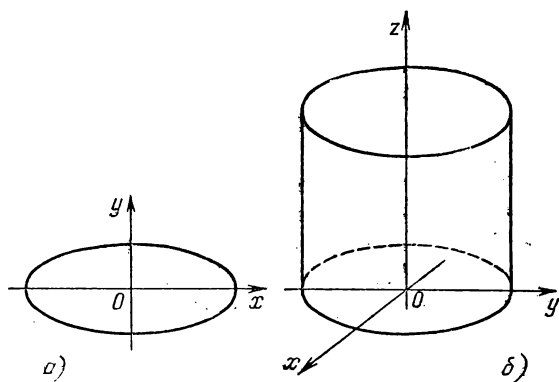


Рис. 231

рическую поверхность с направляющей в плоскости  $Oxy$  и образующими, параллельными оси  $Oz$  (рис. 231, б).

#### 5) Уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

на плоскости  $Oxy$  определяет гиперболу с центром в начале координат и полуосями  $a$  и  $b$  (рис. 232, а). В пространстве это уравнение определяет гиперболическую ци-

линдрическую поверхность с образующими, параллельными оси  $Oz$  (рис. 232, б).

б) Уравнение

$$y^2 = 2px$$

на плоскости  $Oxy$  определяет параболу (рис. 233, а),

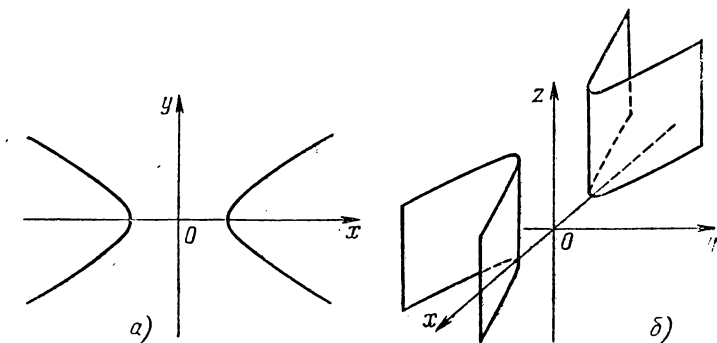


Рис. 232

а в пространстве — параболическую цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси  $Oz$  (рис. 233, б).

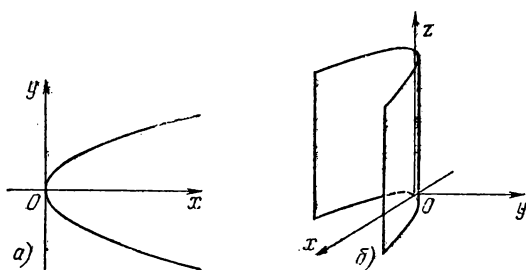


Рис. 233

**Задача 2.** Определить вид поверхности  $3x^2 + 6y^2 - 24 = 0$ .

Δ Данное уравнение приведем к виду

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

Это уравнение в пространстве определяет эллиптическую цилиндрическую поверхность с направляющей в плоскости  $Oxy$  и образующими, параллельными оси  $Oz$ . ▲

**3. Конические поверхности.** Объединение всех прямых, проходящих через каждую точку данной кривой и некоторую фиксированную точку пространства, не лежащую на этой кривой, называется *конической поверхностью*. Данная кривая называется *направляющей*, данная фиксированная точка — *вершиной*, а прямые — *образующими* конической поверхности (рис. 234).

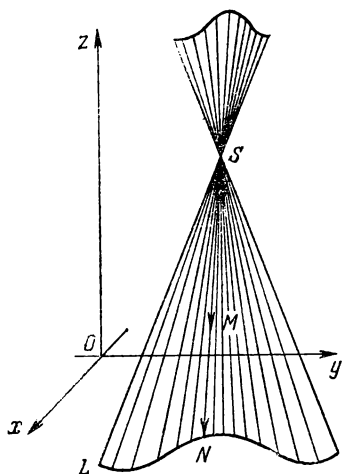


Рис. 234

Легко видеть, что конические поверхности состоят из двух полостей с общей вершиной.

Конические и цилиндрические поверхности обладают замечательным свойством: все они разворачиваются на плоскость без складок и разрывов, и, наоборот, из плоских листов материала, согнув их, можно получать поверхности

конической и цилиндрической формы. Благодаря этому свойству они получили большое применение в технике.

Выведем уравнение конической поверхности.

Если  $M$  — произвольная точка этой поверхности, отличная от вершины  $S$ , а  $N$  — точка пересечения образующей  $SM$  с направляющей  $L$ , то векторы  $\vec{SM}$  и  $\vec{SN}$  коллинеарны. Поэтому существует число  $\lambda$  такое, что

$$\vec{SM} = \lambda \vec{SN}. \quad (1)$$

Пусть для простоты кривая  $L$  лежит в плоскости  $Oxy$  и имеет уравнение

$$F(x; y) = 0, \quad (2)$$

а вершина  $S$  лежит на оси  $Oz$  и имеет координаты  $(0; 0; c)$ ,  $c \neq 0$ . Тогда

$$\vec{SM} = (x; y; z - c), \quad \vec{SN} = (\xi; \eta; -c),$$

где  $(x; y; z)$  — координаты точки  $M$ , а  $(\xi; \eta)$  — координаты точки  $N$  на плоскости  $Oxy$ . Из векторного равенства (1) получаем следующие равенства для координат:

$$x = \lambda \xi, \quad y = \lambda \eta, \quad z - c = -\lambda c.$$

Отсюда находим

$$\xi = \frac{cx}{c-z}, \quad \eta = \frac{cy}{c-z}.$$

Так как координаты  $\xi, \eta$  удовлетворяют уравнению (2), то координаты  $(x; y; z)$  удовлетворяют уравнению

$$F\left(\frac{cx}{c-z}, \frac{cy}{c-z}\right) = 0. \quad (3)$$

Это и есть уравнение конической поверхности с вершиной в точке  $S(0; 0; c)$ ,  $c \neq 0$ , и направляющей  $F(x; y) = 0$ . Таким образом, уравнение конической поверхности (3) получается из уравнения направляющей (2) заменой  $x$  на  $\frac{cx}{c-z}$  и  $y$  на  $\frac{cy}{c-z}$ .

**Задача.** Составить уравнение конической поверхности с вершиной в точке  $(0; 0; c)$ ,  $c > 0$ , и направляющей

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

$\Delta$  Данная коническая поверхность имеет уравнение

$$\frac{1}{a^2} \left( \frac{cx}{c-z} \right)^2 + \frac{1}{b^2} \left( \frac{cy}{c-z} \right)^2 = 1.$$

После соответствующих преобразований получаем искомое уравнение:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{(z-c)^2}{c^2}. \quad \blacktriangle$$

### Вопросы для контроля

1. Напишите уравнение какого-нибудь;

- а) эллипсоида вращения;
- б) однополостного гиперболоида вращения;
- в) двуполостного гиперболоида вращения;
- г) параболоида вращения.

2. При каких значениях  $c$  поверхность

$$x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{c} = 1$$

является поверхностью вращения?

3. Укажите какую-нибудь направляющую и какую-нибудь образующую цилиндрической поверхности:

- а)  $x^2 + y^2 = 0$ ;    б)  $y^2 - z^2 = 1$ .

4. Какие поверхности задаются уравнениями

- а)  $x^2 + y^2 = 25$ ;    б)  $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ ;
- в)  $xy = 25$ ;    г)  $y^2 - z^2 = 0$ ?

## Упражнения

7.38. Составьте уравнение поверхности вращения эллипса  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{14} = 1$  вокруг оси  $Oy$ .

7.39. Эллипс с полуосями  $a=6$ ,  $b=4$  и центром в начале координат вращается вокруг своей большой оси, совпадающей с осью  $Oz$ . Составьте уравнение поверхности вращения. Изобразите поверхность.

7.40. Составьте уравнение поверхности, описываемой гиперболой при ее вращении вокруг своей действительной оси, совпадающей с осью  $Ox$ . Полуоси гиперболы  $a=8$  и  $b=6$ , а центр ее совпадает с началом координат. Изобразите поверхность.

7.41. Составьте уравнение поверхности вращения гиперболы  $\frac{x^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1$  вокруг оси  $Oz$ . Изобразите поверхность.

7.42. Составьте уравнение поверхности вращения параболы  $y^2 = 6z$  вокруг оси  $Oz$ . Изобразите поверхность.

7.43. Составьте уравнение поверхности вращения прямой  $x-3=0$  вокруг оси  $Oz$ . Изобразите поверхность.

7.44. Составьте уравнение поверхности вращения прямой  $\begin{cases} 3x=2y, \\ z=0 \end{cases}$  вокруг оси  $Ox$ .

7.45. Составьте уравнение цилиндрической поверхности, у которой направляющая лежит в плоскости  $Oxy$  и имеет уравнение  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ , а образующая параллельна вектору  $a=(1; 0; 1)$ .

7.46. Какие поверхности задаются уравнениями:

1)  $x^2 + y^2 = z^2$ ; 2)  $y^2 = z^2$ ; 3)  $4x^2 + 9y^2 = 36$ ;

4)  $9x^2 - 4z^2 = 36$ ; 5)  $y^2 = 6x$ ; 6)  $4x^2 + y^2 + z^2 = 8x$ ; 7)  $y^2 + z^2 = x$ .

7.47. Найдите ось вращения поверхности  $x^2 + y^2 = x$ .

7.48. Составьте уравнение конической поверхности, полученной вращением двух пересекающихся прямых:  $\frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 0$ ,  $x=0$ , вокруг оси  $Oz$ .

7.49. Определите, какая поверхность задана уравнением  $\frac{x^2}{48} - \frac{y^2}{12} - \frac{z^2}{12} = 1$  и установите, по какой линии она пересекается с плоскостью  $z-1=0$ .

7.50. Определите, какая поверхность задана уравнением  $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{18} + \frac{z^2}{8} = 1$  и установите, по какой линии она пересекается с плоскостью  $z+2=0$ .

7.51. Определите, какая поверхность задана уравнением  $x^2 + y^2 - 4z = 0$  и установите, по какой линии она пересекается с плоскостью  $x-2=0$ .

7.52. Кривая в пространстве задана параметрическими уравнениями

$$x = 2 \cos t, \quad y = 3 \sin t, \quad z = 4.$$

Составьте уравнение конической поверхности с вершиной в начале координат, для которой данная кривая является направляющей.

## ОБЪЕМЫ ТЕЛ И ПЛОЩАДИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

### § 33. Объем прямой призмы и прямого цилиндра

**1. Объем прямого параллелепипеда.** За единицу измерения объемов принимается объем куба, у которого длина ребра равна единице длины. Например,  $1 \text{ м}^3$  — это объем куба, длина ребра которого равна 1 м, а  $1 \text{ см}^3$  — это объем куба, длина ребра которого 1 см. Очевидно, что  $1 \text{ м}^3 = 100^3 \text{ см}^3$ .

Если выбрана единица длины, то любой куб, длина ребра которого равна единице, называется *единичным*. Объем единичного куба равен соответствующей единице объема. *Объемом тела* называется число единичных кубов и их частей, исчерпывающих данное тело. Это число может быть целым, рациональным, и, вообще, произвольным неотрицательным действительным числом.

В дальнейшем при доказательстве утверждений об объемах предполагается, что выполняются следующие свойства:

1) равные многогранники имеют равные объемы (*свойство инвариантности*);

2) объем многогранника, являющегося объединением нескольких многогранников, любые два из которых не имеют общих внутренних точек, равен сумме объемов этих многогранников (*свойство аддитивности*).

Из свойства 2) вытекает *свойство монотонности*: объем части многогранника не больше объема всего многогранника.

Многогранники, имеющие равные объемы, называются *равновеликими*.

Прежде всего выведем формулу для объема прямоугольного параллелепипеда. Напомним, что длины трех ребер прямоугольного параллелепипеда, сходящихся в одной вершине, называются его *измерениями*. Одно из них можно считать длиной, другое — шириной, а третье — высотой.

Теорема 1. Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений, т. е.

$$V = abc, \quad (1)$$

где  $a, b, c$  — три измерения параллелепипеда.

□ Очевидно, что если у прямоугольного параллелепипеда все три измерения являются целыми числами

$$a = m, \quad b = p, \quad c = q,$$

то он плоскостями, параллельными граням, разбивается на  $mpq$  единичных кубов, и поэтому его объем равен произведению  $abc$ .

Рассмотрим теперь случай, когда все три измерения  $a, b, c$  — рациональные числа. Приведем эти числа к общему знаменателю. Тогда

$$a = \frac{m}{n}, \quad b = \frac{p}{n}, \quad c = \frac{q}{n},$$

где  $n, m, p, q$  — натуральные числа.

Плоскостями, параллельными граням, единичный куб разделим на  $n^3$  равновеликих кубов. Объем каждого такого куба равен  $\frac{1}{n^3}$ .

Рассматриваемый прямоугольный параллелепипед содержит  $mpq$  маленьких кубиков, и поэтому его объем  $V$  равен сумме объемов всех этих кубов:

$$V = mpq \cdot \frac{1}{n^3} = \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{n} \cdot \frac{q}{n} = abc.$$

Рассмотрим, наконец, общий случай, когда измерения  $a, b, c$  — действительные числа. Обозначим их  $n$ -е десятичные приближения с недостатком и избытком соответственно через  $a_n, b_n, c_n$  и  $a'_n, b'_n, c'_n$ . Через  $V_n$  и  $V'_n$  обозначим объемы параллелепипедов, измерениями которых являются соответственно  $a_n, b_n, c_n$  и  $a'_n, b'_n, c'_n$ . Тогда

$$V_n = a_n b_n c_n, \quad V'_n = a'_n b'_n c'_n,$$

так как в случае, когда все три измерения параллелепипеда — рациональные числа, эта формула уже доказана.

Согласно свойству монотонности объемов

$$V_n \leq V \leq V'_n,$$

т. е.

$$a_n b_n c_n \leq V \leq a'_n b'_n c'_n.$$

Переходя к пределу при  $n \rightarrow \infty$  в этом неравенстве, получаем формулу (1). ■

Следствие. Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению площади его основания на высоту, т. е.

$$V = QH, \quad (2)$$

где  $Q$  — площадь основания параллелепипеда, а  $H$  — его высота.

□ За основание прямоугольного параллелепипеда примем прямоугольник, длины сторон которого равны

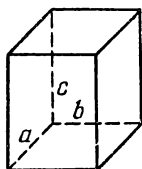


Рис. 235

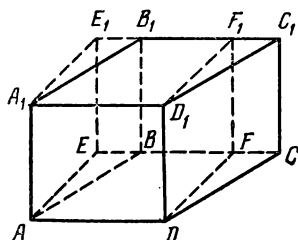


Рис. 236

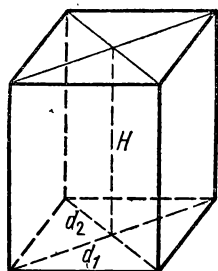


Рис. 237

$a$  и  $b$  (рис. 235). Тогда  $ab = Q$  — площадь основания параллелепипеда,  $c = H$  — его высота, и поэтому формула (2) следует из формулы (1). ■

Теорема 2. Объем прямого параллелепипеда равен произведению площади его основания на высоту, т. е.

$$V = QH, \quad (3)$$

где  $Q$  — площадь основания параллелепипеда, а  $H$  — его высота.

□ Рассмотрим прямой параллелепипед, основанием которого является параллелограмм  $ABCD$  (рис. 236). Проведем через ребра  $AA_1$  и  $DD_1$  плоскости  $AA_1E_1E$  и  $DD_1F_1F$  перпендикулярно прямой  $BC$  и построим прямоугольный параллелепипед  $AEFDA_1E_1F_1D_1$ . Этот параллелепипед равновелик данному, так как треугольная призма  $AEBA_1E_1B_1$  равна треугольной призме  $DFCD_1F_1C_1$ . Согласно формуле (2)

$$V = S_{AEFD}H,$$

где  $S_{AEFD}$  — площадь прямоугольника  $AEFD$ . А так как этот прямоугольник равновелик параллелограмму  $ABCD$ , т. е.  $S_{AEFD} = Q$ , то формула (3) доказана. ■



**Задача.** Основанием прямого параллелепипеда является ромб, площадь которого равна  $S$ . Площади диагональных сечений равны  $S_1$  и  $S_2$ . Найти объем параллелепипеда.

△ Для нахождения объема параллелепипеда нужно найти его высоту  $H$  (рис. 237). Обозначим длины диагоналей основания через  $d_1$  и  $d_2$ . Тогда

$$d_1 \cdot H = S_1, \quad d_2 \cdot H = S_2, \quad d_1 \cdot d_2 = 2S.$$

Из этих уравнений находим

$$\frac{S_1}{H} \cdot \frac{S_2}{H} = 2S, \quad H = \sqrt{\frac{S_1 \cdot S_2}{2S}}.$$

Следовательно,

$$V = S \cdot H = S \sqrt{\frac{S_1 \cdot S_2}{2S}} = \sqrt{\frac{S \cdot S_1 \cdot S_2}{2}}. \blacktriangle$$

## 2. Объем прямой призмы.

**Теорема.** Объем прямой призмы равен произведению площади ее основания на высоту, т. е.

$$V = QH, \quad (1)$$

где  $Q$  — площадь основания призмы, а  $H$  — ее высота.

□ Рассмотрим сначала треугольную призму  $ABCA_1B_1C_1$  (рис. 238). Построим ее до прямого параллелепипеда  $ACBDA_1C_1B_1D_1$ . Очевидно, площадь основания  $ACBD$  этого параллелепипеда равна  $2Q$ , а высота равна  $H$ , и поэтому его объем равен  $2QH$ .

Так как призмы  $ABCA_1B_1C_1$  и  $ABDA_1B_1D_1$  равны, то их объемы равны. Следовательно, если  $V$  — объем данной призмы, то  $2V = 2QH$ , т. е.  $V = QH$ . Для треугольной призмы теорема доказана.

Рассмотрим теперь произвольную  $n$ -угольную прямую призму ( $n > 3$ ). Через одно из боковых ребер призмы проведем диагональные сечения (рис. 239). Тогда данная призма разобьется на  $n-2$  треугольные призмы высоты  $H$ , сумма объемов которых равна объему данной призмы. Поэтому, если  $Q_1, Q_2, \dots, Q_{n-2}$  — площади оснований полученных треугольных призм, то  $Q_1 + Q_2 + \dots + Q_{n-2} = Q$  и

$$\begin{aligned} V &= Q_1 H + Q_2 H + \dots + Q_{n-2} H = \\ &= (Q_1 + Q_2 + \dots + Q_{n-2}) H = QH. \blacksquare \end{aligned}$$

**Замечание.** В § 36 будет доказано, что формула (1) справедлива для объема произвольной призмы.

Задача. Найти объем правильной шестиугольной призмы, у которой наибольшая диагональ равна  $d$ , а боковые грани — квадраты.

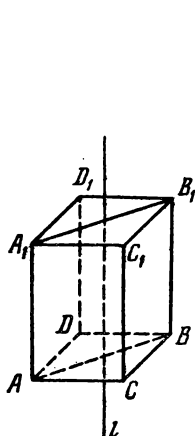


Рис. 238

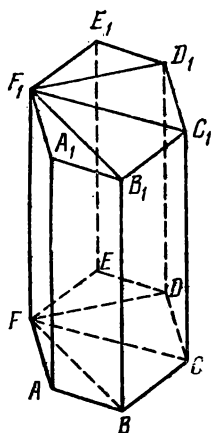


Рис. 239

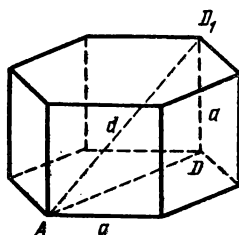


Рис. 240

△ Обозначим длину стороны основания призмы через  $a$  (рис. 240) и найдем площадь основания:

$$Q = 6 \cdot \frac{1}{2} a^2 \sin 60^\circ = 3 \cdot a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2.$$

Из треугольника  $ADD_1$  по теореме Пифагора получаем

$$AD_1^2 = AD^2 + DD_1^2,$$

т. е.  $d^2 = (2a)^2 + a^2 = 5a^2$ ,  $a = \frac{d}{\sqrt{5}}.$

Следовательно,

$$V = QH = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2 \cdot a = \frac{3\sqrt{3}}{10\sqrt{5}} d^3. \blacktriangle$$

**3. Объем прямого цилиндра.** Пусть в пространстве задано ограниченное тело  $D$ . Всякий многогранник  $K$ , содержащий тело  $D$ , будем называть *описанным* около тела  $D$ , а всякий многогранник  $K'$ , содержащийся в  $D$ , будем называть *вписанным* в тело  $D$ .

Если для тела  $D$  существуют последовательности вписанных и описанных многогранников

$$K'_n \subset D \subset K_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

объемы которых  $V'_n$  и  $V_n$  имеют при  $n \rightarrow \infty$  общий предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V'_n = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n = V,$$

то число  $V$  называется *объемом тела  $D$* .

Отметим, что объем тела, определенный таким образом, обладает свойствами инвариантности и аддитивности.

**Замечание 1.** Можно доказать, что если для тела  $D$  существуют две последовательности вписанных и описанных тел (не обязательно многогранников), объемы которых имеют общий предел  $V$ , то объем тела  $D$  равен числу  $V$ .

**Теорема.** *Объем прямого цилиндра равен произведению площади его основания на высоту, т. е.*

$$V = QH, \quad (1)$$

где  $Q$  — площадь основания, а  $H$  — высота цилиндра.

□ Так как площадь основания цилиндра равна  $Q$ , то существуют последовательности описанных и вписанных многоугольников с площадями  $Q_n$  и  $Q'_n$  таких, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n = \lim_{n \rightarrow \infty} Q'_n = Q.$$

Построим последовательности призм, основаниями которых являются рассмотренные выше описанные и вписанные многоугольники, а боковые ребра параллельны образующей данного цилиндра и имеют длину  $H$ . Эти призмы являются описанными и вписанными для данного цилиндра. Их объемы находятся по формулам

$$V_n = Q_n H \text{ и } V'_n = Q'_n H.$$

Следовательно,

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} Q_n H = \lim_{n \rightarrow \infty} Q'_n H = QH. \blacksquare$$

**Замечание 2.** В § 36 будет доказано, что по формуле (1) вычисляется объем произвольного цилиндра.

**Следствие.** *Объем прямого кругового цилиндра вычисляется по формуле*

$$V = \pi R^2 H,$$

где  $R$  — радиус основания, а  $H$  — высота цилиндра.

□ Так как основание кругового цилиндра есть круг радиуса  $R$ , то  $Q = \pi R^2$ , и поэтому  $V = QH = \pi R^2 H$ . ■

**Задача.** В прямой круговой цилиндр вписана правильная треугольная призма (рис. 241). Найти отношение объема цилиндра к объему призмы.

△ Пусть  $V$ —объем цилиндра,  $V_1$ —объем призмы,  $Q$  и  $Q_1$ —площади их оснований. Так как цилиндр и призма имеют одинаковую высоту, то отношение их объемов равно отношению площадей оснований:

$$\frac{V}{V_1} = \frac{Q}{Q_1}.$$

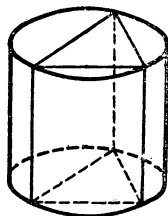


Рис. 241

Очевидно, что  $Q = \pi R^2$ , где  $R$ —радиус основания цилиндра. В основании призмы лежит правильный треугольник, вписанный в окружность радиуса  $R$ . Длина его стороны равна  $\sqrt{3}R$  и поэтому  $Q_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} R^2$ .

Следовательно,

$$\frac{V}{V_1} = \frac{4\pi}{\sqrt{3}} \approx 2,4. \blacktriangle$$

### Вопросы для контроля

1. Из скольких кубов с ребром 0,5 м можно составить куб с ребром 2 м?
2. Какими свойствами обладают объемы многогранников?
3. Многогранники  $K_1$  и  $K_2$  имеют объемы  $V_1$  и  $V_2$ . В каком случае объединение этих многогранников будет иметь объем  $V_1$ ?
4. Что такое равновеликие многоугольники?
5. Чему равен объем прямоугольного параллелепипеда, измерения которого равны 1 см, 2 см, 3 см?
6. Площади оснований параллелепипеда, призмы и цилиндра равны  $Q$ , высоты равны  $H$ . Чему равны объемы этих тел?

### Упражнения

8.1. Многогранники  $K_1$  и  $K_2$  имеют объемы  $V_1$  и  $V_2$ . Найдите объем фигуры  $K_1 \cup K_2$ , если известно, что объем фигуры  $K_1 \cap K_2$  равен  $0,5V_2$ .

8.2. Определите объем прямоугольного параллелепипеда по трем его измерениям 16,8 см, 13,5 см, 10,4 см.

8.3. Найдите отношение объемов частей куба, на которые он рассекается плоскостью, проходящей через его ось симметрии.

8.4. Дан прямоугольный параллелепипед, объем которого равен  $V$ . Найдите объемы частей параллелепипеда, на которые он рассекается плоскостью, проходящей через его ось симметрии.

8.5. Куб объема  $V$  пересечен плоскостью, проходящей через его центр симметрии. Найдите объемы частей куба.

8.6. Диагональ куба равна  $l$ . Найдите объем куба.

8.7. Диагональ прямоугольного параллелепипеда, в основании которого лежит квадрат со стороной  $a$ , равна  $l$ . Найдите объем данного параллелепипеда.

8.8. Докажите, что объем прямоугольного параллелепипеда равен  $\sqrt{Q_1 Q_2 Q_3}$ , если площади его граней равны  $Q_1, Q_2, Q_3$ .

8.9. Стороны основания прямого параллелепипеда равны 7 см и  $\sqrt{18}$  см и образуют угол  $45^\circ$ , меньшая диагональ параллелепипеда составляет угол  $45^\circ$  с плоскостью основания. Найдите объем параллелепипеда.

8.10. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна 12 см и составляет угол  $30^\circ$  с плоскостью боковой грани и угол  $45^\circ$  с боковым ребром. Найдите объем параллелепипеда.

8.11. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна  $l$  и составляет с одной гранью угол  $30^\circ$ , а с другой  $45^\circ$ . Найдите объем параллелепипеда.

8.12. Диагональ прямоугольного параллелепипеда составляет с основанием угол  $60^\circ$ , двугранный угол между диагональным сечением и боковой гранью равен  $45^\circ$ . Найдите объем параллелепипеда, если диагональ основания равна  $d$ .

8.13. В прямом параллелепипеде ребра, выходящие из одной вершины, равны 1 м, 2 м и 3 м, причем два меньших ребра образуют угол  $60^\circ$ . Вычислите объем параллелепипеда.

8.14. В прямом параллелепипеде стороны основания равны 10 см и 17 см. Одна из диагоналей основания равна 21 см, большая диагональ параллелепипеда равна 29 см. Вычислите объем параллелепипеда.

8.15. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна 13 см, а диагонали его боковых граней равны  $4\sqrt{10}$  см и  $3\sqrt{17}$  см. Найдите объем параллелепипеда.

8.16. Основанием прямого параллелепипеда служит параллелограмм с углом  $120^\circ$  и сторонами, равными 3 см и 4 см. Меньшая диагональ параллелепипеда равна большей диагонали основания. Найдите объем параллелепипеда.

8.17. В наклонном параллелепипеде проекция бокового ребра на плоскость основания равна 5 см, а высота 12 см. Сечение, перпендикулярное боковому ребру, есть ромб с площадью  $24 \text{ см}^2$  и диагональю, равной 8 см. Найдите объем параллелепипеда.

8.18. Основанием наклонного параллелепипеда служит ромб со стороной  $a$  и острым углом  $30^\circ$ . Диагональ одной боковой грани перпендикулярна к плоскости основания, а боковое ребро составляет с плоскостью основания угол  $60^\circ$ . Найдите объем параллелепипеда.

8.19. Из медной болванки, имеющей форму прямоугольного параллелепипеда размером  $80 \text{ см} \times 20 \text{ см} \times 5 \text{ см}$ , прокатывается лист толщиной 1 мм. Определите площадь этого листа.

8.20. Из квадратного листа жести со стороной  $a$  изготовлен бак наибольшего объема с квадратным основанием без крышки. Найдите линейные размеры бака.

8.21. Основанием прямой призмы служит равнобедренный треугольник, стороны которого 5 см, 5 см и 6 см; высота призмы равна большей высоте этого треугольника. Найдите объем призмы.

8.22. Основанием прямой призмы служит треугольник со сторонами 7,5 см, 6,5 см и 7 см, а боковое ребро призмы равно  $1\frac{2}{7}$  см. Вычислите ребро куба, равновеликого данной призме.

8.23. Высота прямой треугольной призмы равна 6 м, ее объем 2880 м<sup>3</sup>. Площади боковых граней относятся, как 17:17:16. Найдите длины сторон основания.

8.24. Длина диагонали правильной четырехугольной призмы 3,5 м, а диагонали боковой грани 2,5 м. Найдите объем призмы.

8.25. Диагональ длины  $a$  правильной четырехугольной призмы составляет с боковой гранью угол 30°. Найдите объем призмы.

8.26. В правильной треугольной призме сторона основания равна  $a$ . Найдите объем призмы, если диагональ боковой грани образует с другой боковой гранью угол  $\alpha$ .

8.27. Основанием прямой призмы является равнобедренный треугольник со сторонами 5 см, 5 см и 6 см; диагональ меньшей боковой грани составляет угол 45° с большей боковой гранью. Найдите объем призмы.

8.28. В основании прямой призмы находится треугольник со сторонами 3 см и 5 см и углом 120° между ними. Наибольшая из площадей боковых граней равна 35 см<sup>2</sup>. Найдите объем призмы.

8.29. В основании прямой призмы находится прямоугольный треугольник с площадью  $S$  и острым углом  $\alpha$ . Площадь большей боковой грани равна  $Q$ . Найдите объем призмы.

8.30. Боковое ребро правильной треугольной призмы равно высоте основания, а площадь сечения, проведенного через это боковое ребро и высоту основания, равна  $Q$ . Найдите объем призмы.

8.31. В цилиндре, высота которого равна диаметру основания, проведена плоскость, параллельная его оси и отсекающая от основания дугу, равную 120°. Периметр сечения равен  $(8 + 4\sqrt{3})$  см. Вычислите объем цилиндра.

8.32. Диагональ осевого сечения прямого кругового цилиндра равна  $d = 16$  см и составляет с плоскостью основания угол 60°. Найдите объем цилиндра.

8.33. Цилиндр образован вращением прямоугольника, площадь которого равна  $S$ , вокруг одной из его сторон. Найдите объем цилиндра, если длина окружности, описанной точкой пересечения диагоналей прямоугольника, равна  $C$ .

8.34. В прямом круговом цилиндре площадь сечения, перпендикулярного образующей, равна  $M$ , а площадь осевого сечения равна  $N$ . Определите объем цилиндра.

8.35. Параллельно оси прямого кругового цилиндра проведено сечение, отстоящее от оси на расстоянии  $d$  и отсекающее от окружности основания дугу величиной  $\alpha$ . Площадь сечения равна  $S$ . Найдите объем цилиндра.

8.36. Стальной вал, диаметр которого равен 8,4 см и длина 97 см, обрабатывается так, что его диаметр уменьшается на 0,2 см. Насколько уменьшится масса вала после обработки? (Плотность стали 7,4 г/см<sup>3</sup>.)

8.37. При строительстве метро применяли кольца из железобетона с внешним радиусом 5,5 м и внутренним 5,1 м. Чему равен объем такого кольца длиной 100 м? На сколько процентов уменьшится объем, если длины обоих радиусов уменьшить на 0,4 м?

## § 34. Объем пирамиды

**1. Вычисление объема тела по площадям его параллельных сечений.** Рассмотрим тело  $D$ , ограниченное плоскостями  $x=a$  и  $x=b$  (рис. 242). Через  $S(x)$  обозначим площадь сечения тела  $D$  плоскостью, проходящей через точку с абсциссой  $x \in [a; b]$  и перпендикулярной оси  $Ox$ . Будем предполагать, что

- 1) функция  $S(x)$  непрерывна на  $[a; b]$ ;
- 2) для любых  $x_1$  и  $x_2$  из  $[a; b]$  сечения тела  $D$  плоскостями  $x=x_1$  и  $x=x_2$  таковы, что одно из них проецируется в другое.

Тело  $D$ , обладающее этими свойствами, будем называть *телом с допустимыми параллельными сечениями*.

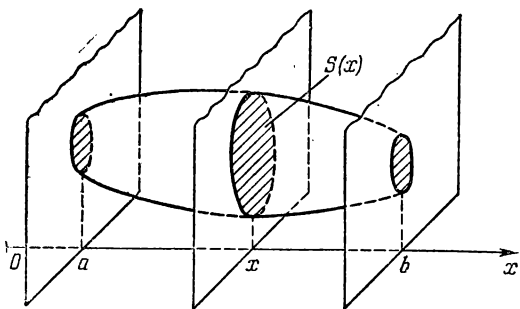


Рис. 242

**Теорема.** Объем тела с допустимыми параллельными сечениями вычисляется по формуле

$$V = \int_a^b S(x) dx. \quad (1)$$

□ Отрезок  $[a; b]$  точками

$$x_i = a + \frac{b-a}{n} i, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

разобьем на  $n$  отрезков  $[x_{i-1}; x_i]$  длины

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}.$$

Пусть  $m_i$  и  $M_i$  — наименьшее и наибольшее значения функции  $S(x)$  на отрезке  $[x_{i-1}; x_i]$ .

Плоскостями  $x=x_i$ , где  $i=1, 2, \dots, n-1$ , тело  $D$  разобьем на  $n$  слоев. Выделим  $i$ -й слой, соответствующий отрезку  $[x_{i-1}; x_i]$ , и построим два цилиндра высоты  $\Delta x_i$ : один с основанием площади  $M_i$ , содержащий  $i$ -й слой, а другой с основанием площади  $m_i$ , содержащийся в  $i$ -м слое (рис. 243). Объемы этих цилиндров равны  $M_i \Delta x_i$  и  $m_i \Delta x_i$ .

Произведя указанные построения для каждого слоя, получим два ступенчатых тела  $D'_n$  и  $D_n$  таких, что  $D'_n < D < D_n$ . Их объемы равны

$$V'_n = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i, \quad V_n = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i.$$

Так как функция  $S(x)$  непрерывна, то  $V'_n$  и  $V_n$  при  $n \rightarrow \infty$  имеют один и тот же предел, равный  $\int_a^b S(x) dx$ . Следовательно, объем тела  $D$  вычисляется по формуле (1). ■

**Замечание.** Можно доказать, что формула (1) остается справедливой и в том случае, когда условие 2) для тела  $D$  не выполняется.

**Задача.** Определить объем тела, отсекаемого от прямого кругового цилиндра плоскостью, проходящей через диаметр основания и составляющей с плоскостью

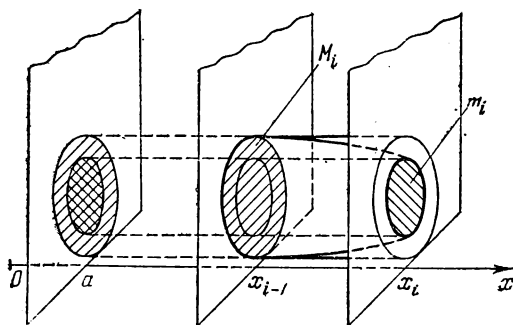


Рис. 243

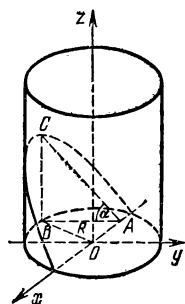


Рис. 244

основания угол  $\alpha$  ( $\alpha < 90^\circ$ ). Радиус основания цилиндра равен  $R$ .

△ Введем систему координат так, как показано на рис. 244, и рассмотрим сечения данного тела плоскостями, перпендикулярными оси  $Ox$ .



Вычислим площадь сечения плоскостью, проходящей через точку  $A$  с абсциссой  $x$ ,  $|x| < R$ . Это сечение представляет собой прямоугольный треугольник  $ABC$ , и поэтому

$$S(x) = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{1}{2} AB^2 \operatorname{tg} \alpha = \\ = \frac{1}{2} (R^2 - OA^2) \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} (R^2 - x^2) \operatorname{tg} \alpha.$$

Применяя формулу (1), получаем

$$V = \int_{-R}^R \frac{1}{2} (R^2 - x^2) \operatorname{tg} \alpha dx = \operatorname{tg} \alpha \int_0^R (R^2 - x^2) dx = \\ = \operatorname{tg} \alpha \left( R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^R = \operatorname{tg} \alpha \left( R^3 - \frac{R^3}{3} \right) = \frac{2}{3} R^3 \operatorname{tg} \alpha. \quad \Delta$$

## 2. Объем пирамиды.

**Теорема.** Объем пирамиды равен одной трети произведения площади основания на высоту, т. е.

$$V = \frac{1}{3} QH, \quad (1)$$

где  $Q$  — площадь основания, а  $H$  — высота пирамиды.

□ Через вершину пирамиды проведем плоскость  $p$ , параллельную плоскости основания (рис. 245). Ось  $Ox$

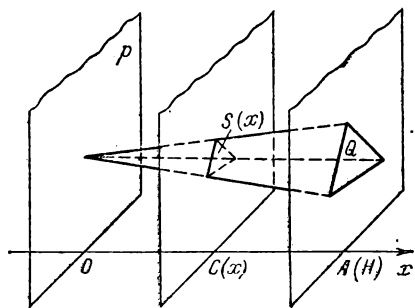


Рис. 245

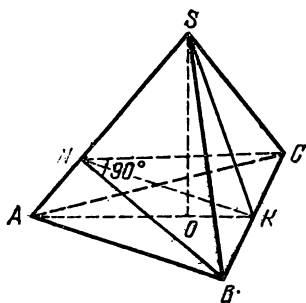


Рис. 246

выберем следующим образом: точка  $O$  лежит в плоскости  $p$ , а ось  $Ox$  перпендикулярна  $p$  и направлена в сторону основания пирамиды. Тогда абсцисса вершины равна нулю, а абсцисса точки  $A$  пересечения плоскости основания с осью  $Ox$  равна высоте пирамиды  $H$ .

Через  $S(x)$  обозначим площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей параллельно основанию на рас-

стоянии  $x$  от вершины. Как известно (§ 16), в пирамиде площадь основания и площадь сечения, параллельного основанию, относятся, как квадраты их расстояний от вершины. Поэтому

$$\frac{S(x)}{Q} = \frac{x^2}{H^2}, \text{ т. е. } S(x) = \frac{Q}{H^2} x^2.$$

Для вычисления объема пирамиды применим формулу (1) из п. 1

$$V = \int_0^H \frac{Q}{H^2} x^2 dx = \frac{Q}{H^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^H = \frac{1}{3} QH. \blacksquare$$

**Задача.** Найти объем правильной треугольной пирамиды, у которой сторона основания равна  $a$ , а угол между боковыми гранями равен  $90^\circ$ .

△ Пусть  $SABC$  — данная пирамида (рис. 246), а  $\angle BNC$  — линейный угол двугранного угла с ребром  $AS$ .

Так как  $\triangle ABC$  правильный,  $AB = a$ , то

$$BK = \frac{a}{2}, \quad AK = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Следовательно, для площади основания получаем

$$Q = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Найдем высоту пирамиды  $H = SO$ . Так как треугольники  $ASO$  и  $ANK$  прямоугольные и имеют один общий острый угол, то они подобны.

Из подобия этих треугольников следует, что

$$\frac{SO}{NK} = \frac{AS}{AK}. \quad (2)$$

Здесь  $NK = BK = \frac{a}{2}$ , так как угол  $BNK$  равен  $45^\circ$ ;

$$AS = \sqrt{OS^2 + AO^2} = \sqrt{H^2 + \frac{a^2}{3}}.$$

Следовательно, из равенства (2) получаем

$$SO = H = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{H^2 + \frac{a^2}{3}},$$

$$2H^2 = \frac{a^2}{3}, \quad H = \frac{a}{\sqrt{6}}.$$

Таким образом,

$$V = \frac{1}{3} QH = \frac{a^3}{12\sqrt{2}} = \frac{V\sqrt{2}}{24} a^3. \blacktriangle$$

### 3. Объем усеченной пирамиды.

Теорема. Объем усеченной пирамиды с высотой  $H$  и площадями оснований  $Q$  и  $q$  вычисляется по формуле

$$V = \frac{1}{3} H (q + Q + \sqrt{qQ}).$$

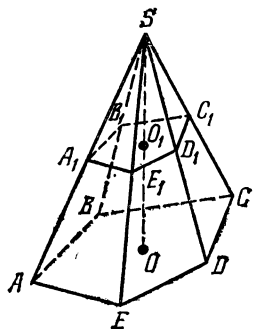


Рис. 247

□ Объем усеченной пирамиды  $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$  можно найти как разность объемов пирамид  $SABCDE$  и  $SA_1B_1C_1D_1E_1$  (рис. 247).

Поэтому

$$V = \frac{1}{3} Q(H + h) - \frac{1}{3} qh,$$

где  $h$  — высота пирамиды, дополняющей усеченную пирамиду до полной.

Так как  $\frac{Q}{q} = \frac{(h+H)^2}{h^2}$ , то

$$\frac{\sqrt{Q}}{\sqrt{q}} = 1 + \frac{H}{h},$$

$$\frac{H}{h} = \frac{\sqrt{Q} - \sqrt{q}}{\sqrt{q}},$$

и, следовательно,

$$h = \frac{H\sqrt{q}}{\sqrt{Q} - \sqrt{q}}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} QH + \frac{1}{3} h(Q - q) = \frac{1}{3} QH + \frac{1}{3} H\sqrt{q}(\sqrt{Q} + \sqrt{q}) = \\ &= \frac{1}{3} H(Q + \sqrt{qQ} + q). \blacksquare \end{aligned}$$

### Вопросы для контроля

1. Как можно вычислить объем тела в том случае, когда известны площади его параллельных сечений?
2. Сформулируйте теорему об объеме пирамиды.
3. Чему равен объем усеченной пирамиды с высотой  $H$  и площадями оснований  $Q$  и  $q$ ?

## Упражнения

8.38. Вычислите объем пирамиды, в основании которой лежит прямоугольник со сторонами 6 см и 8 см, а каждое боковое ребро равно 13 см.

8.39. Высота правильной шестиугольной пирамиды равна 1 м, а апофема ее образует с высотой угол  $30^\circ$ . Вычислите объем пирамиды.

8.40. Боковые ребра  $a$ ,  $b$  и  $c$  треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны. Докажите, что ее объем равен  $\frac{abc}{6}$ .

8.41. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна  $a$ , плоский угол при вершине  $\alpha$ . Найдите объем пирамиды.

8.42. Основание пирамиды — ромб со стороной  $a$  и острым углом  $\alpha$ . Все двугранные углы при основании равны  $\varphi$ . Найдите объем пирамиды.

8.43. Основание пирамиды — ромб со стороной  $a$  и острым углом  $\alpha$ , высота пирамиды  $h$ . Найдите объем пирамиды.

8.44. Основание пирамиды — равнобедренный треугольник, высота которого равна  $h$ , а угол при вершине  $\alpha$ . Высота пирамиды равна  $H$ . Найдите объем пирамиды.

8.45. В треугольной усеченной пирамиде высота равна 10 м, стороны нижнего основания равны 27 м, 29 м и 52 м, а периметр верхнего основания равен 72 м. Определите объем усеченной пирамиды.

8.46. Пирамида Хеопса имеет форму правильной четырехугольной пирамиды с высотой  $\approx 150$  м и боковым ребром  $\approx 220$  м. Найдите объем пирамиды.

8.47. Один из алмазов, добытых в Якутии, имеет массу 42 карата и форму правильного октаэдра. Найдите ребро этого октаэдра. (Плотность алмаза  $3,5$  г/см<sup>3</sup>, 1 карат = 0,2 г.)

8.48. Боковые грани треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны, а площади их равны  $a^2$ ,  $b^2$  и  $c^2$ . Определите объем пирамиды.

8.49. В пирамиде через середину высоты проведена плоскость, параллельная основанию. Определите объем образовавшейся усеченной пирамиды, если высота данной пирамиды равна 18 см, а площадь основания 400 см<sup>2</sup>.

8.50. Стороны оснований правильной треугольной усеченной пирамиды  $a$  и  $b$  ( $a > b$ ), двугранный угол при стороне большего основания  $\alpha$ . Найдите объем усеченной пирамиды.

8.51. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде стороны оснований  $a$  и  $b$  ( $a > b$ ), острый угол боковой грани равен  $\alpha$ . Определите объем усеченной пирамиды.

8.52. Вычислите объемы тел, образованных вращением вокруг оси  $Ox$  плоских фигур, ограниченных линиями:

1)  $y = \sin x$ ,  $0 \leq x \leq \pi$  и  $y = 0$ ;

2)  $xy = 4$ ,  $y = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = 4$ ;

3)  $y = x^2$ ,  $y = 1$ ; 4)  $y = \frac{x^2}{2}$ ,  $y = -x + \frac{3}{2}$ ;

5)  $y = \sin x$ ,  $y = \frac{2}{\pi}x$ ,  $x > 0$ ;

6)  $y^2 = x$ ,  $x^2 = y$ ; 7)  $y^2 = (x-1)^3$ ,  $x = 2$ ;

8)  $x^2 - y^2 = 1$ ,  $x = a + 1$  ( $a > 0$ ).

## § 35. Объемы тел вращения

**1. Формула для объема тела вращения.** Рассмотрим тело, полученное вращением вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, которая соответствует неотрицательной непрерывной функции  $y=f(x)$ ,  $x \in [a; b]$  (рис. 248). Очевидно, что сечение этого тела плоскостью, проходящей через точку с абсциссой  $x \in [a; b]$  и перпендикулярной оси  $Ox$ , есть круг радиуса  $f(x)$ . Следовательно, площадь  $S(x)$  этого сечения равна  $S(x) = \pi f^2(x)$ ,

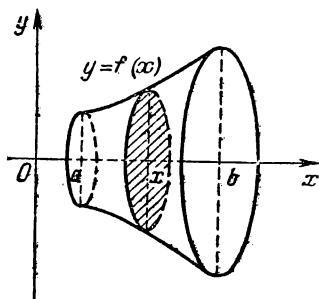


Рис. 248

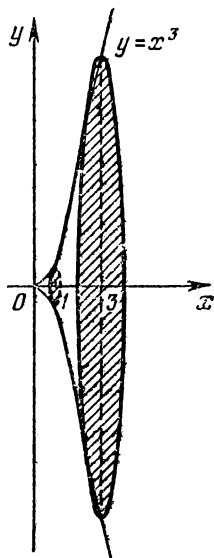


Рис. 249

а объем рассматриваемого тела вращения вычисляется по формуле

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx. \quad (1)$$

**Задача 1.** Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси  $Ox$  криволинейной трапеции, соответствующей функции  $y=x^3$ ,  $x \in [1; 3]$  (рис. 249).

△ По формуле (1) получаем

$$V = \pi \int_1^3 x^6 dx = \frac{\pi}{7} x^7 \Big|_1^3 = \frac{\pi}{7} (3^7 - 1) = \frac{2186}{7} \pi. \quad \blacktriangle$$

**Задача 2.** Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, соответствующей функции  $y = \cos x$ ,  $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  (рис. 250).

△ По формуле (1) получаем

$$V = \pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 x \, dx = \frac{\pi}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos 2x) \, dx = \frac{\pi^2}{2}. \blacktriangle$$

**Задача 3.** Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями  $y = \sqrt{3x}$ ,  $y = \frac{x}{2}$  и  $x = 3$  (рис. 251).

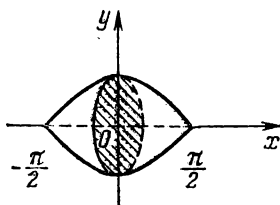


Рис. 250

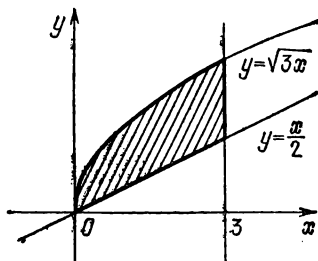


Рис. 251

△ Очевидно, что объем данного тела вращения равен разности объемов тел, полученных вращением криволинейных трапеций, соответствующих функциям  $y = \sqrt{3x}$  и  $y = \frac{x}{2}$ ,  $x \in [0; 3]$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^3 3x \, dx - \pi \int_0^3 \frac{x^2}{4} \, dx = \\ &= \frac{3\pi}{2} x^2 \Big|_0^3 - \frac{\pi}{12} x^3 \Big|_0^3 = \frac{27}{2} \pi - \frac{27}{12} \pi = \frac{45}{4} \pi. \blacktriangle \end{aligned}$$

## 2. Объем прямого кругового конуса.

**Теорема 1.** Объем прямого кругового конуса с высотой  $H$  и радиусом основания  $R$  вычисляется по формуле

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 H.$$

□ Данный конус можно рассматривать как тело, полученное вращением треугольника с вершинами в точках  $O(0; 0)$ ,  $B(H; 0)$ ,  $A(H; R)$  вокруг оси  $Ox$  (рис. 252). Треугольник  $OAB$  является криволинейной трапецией, соответствующей функции  $y = \frac{R}{H} x$ ,  $x \in [0; H]$ . Поэтому,

используя формулу (1) из п. 1 получаем

$$V = \pi \int_0^H \left( \frac{R}{H} x \right)^2 dx = \frac{\pi R^2}{H^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^H = \frac{1}{3} \pi R^2 H. \quad \blacksquare$$

**Следствие.** Объем прямого кругового конуса равен одной трети произведения площади основания на высоту, т. е.

$$V = \frac{1}{3} QH,$$

где  $Q$  — площадь основания, а  $H$  — высота конуса.

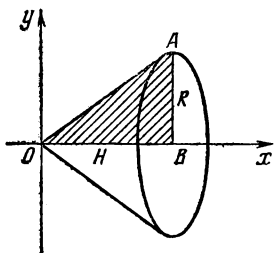


Рис. 252

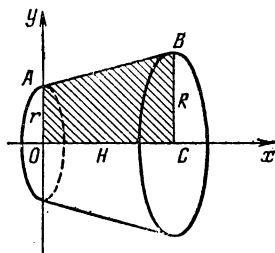


Рис. 253

**Теорема 2.** Объем усеченного конуса с радиусами оснований  $r$  и  $R$  и высотой  $H$  вычисляется по формуле

$$V = \frac{1}{3} \pi H (r^2 + R^2 + rR).$$

□ Усеченный конус можно получить вращением вокруг оси  $Ox$  трапеции  $OABC$  (рис. 253). Прямая  $AB$  проходит через точки  $(0; r)$  и  $(H; R)$ , поэтому она имеет уравнение

$$y = \frac{R-r}{H} x + r.$$

Используя формулу (1) из п. 1, получаем

$$V = \pi \int_0^H \left( \frac{R-r}{H} x + r \right)^2 dx.$$

Для вычисления интеграла сделаем замену

$$u = \frac{R-r}{H} x + r, \quad du = \frac{R-r}{H} dx.$$

Очевидно, когда  $x$  изменяется в пределах от 0 до  $H$ , переменная  $u$  изменяется от  $r$  до  $R$ , и поэтому

$$V = \pi \int_r^R u^2 \frac{H}{R-r} du = \frac{\pi H}{R-r} \cdot \frac{u^3}{3} \Big|_r^R = \frac{\pi H}{3(R-r)} (R^3 - r^3) = \\ = \frac{1}{3} \pi H (R^2 + r^2 + Rr). \quad \blacksquare$$

**Задача.** Найти объем тела, полученного вращением равнобедренного треугольника около оси  $l$ , проходящей через вершину основания параллельно боковой стороне. Длина боковой стороны равна  $a$ , угол при вершине равен  $\alpha$  ( $\alpha < \frac{\pi}{2}$ ).

△ Пусть  $ABC$  — данный треугольник (рис. 254). Проведем отрезки  $CL$  и  $BK$ , перпендикулярные оси  $l$ . Тогда объем  $V$  тела, полученного вращением  $\triangle ABC$ , вычисляется по формуле

$$V = V - V' - V'',$$

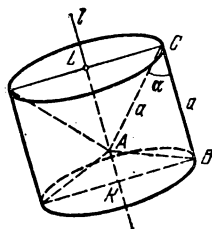


Рис. 254

где  $V$  — объем цилиндра, полученного вращением прямоугольника  $KBCL$ , а  $V'$  и  $V''$  — объемы конусов, образующихся при вращении  $\triangle AKB$  и  $\triangle ALC$ .

Следовательно,

$$V = \pi LC^2 \cdot BC - \frac{\pi}{3} KB^2 \cdot AK - \frac{\pi}{3} LC^2 \cdot AL,$$

а так как  $LC = KB$  и  $AK + AL = BC$ , то

$$V = \pi LC^2 \left( BC - \frac{1}{3} BC \right) = \frac{2}{3} \pi LC^2 \cdot BC.$$

По условию  $BC = a$ , а из  $\triangle ALC$  находим  $LC = a \sin \alpha$ . Следовательно,

$$V = \frac{2}{3} \pi a^3 \sin^2 \alpha. \quad \blacktriangle$$

### 3. Объем шара и его частей.

#### 1) Объем шара.

**Теорема 1.** Объем шара радиуса  $R$  вычисляется по формуле

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3. \quad (1)$$



□ Шар является телом вращения. Он получается вращением вокруг оси  $Ox$  криволинейной трапеции, соответствующей функции  $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ ,  $x \in [-R; R]$  (рис. 255).

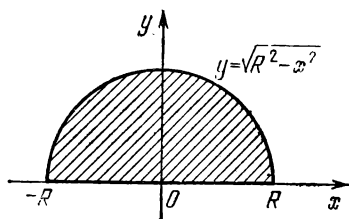


Рис. 255

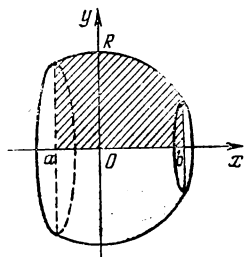


Рис. 256

Следовательно, по формуле для объема тела вращения получаем

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-R}^R (R^2 - x^2) dx = 2\pi \int_0^R (R^2 - x^2) dx = \\ &= 2\pi \left( R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^R = 2\pi \left( R^3 - \frac{R^3}{3} \right) = \frac{4}{3} \pi R^3. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Задача 1. Требуется переплавить в один шар два свинцовых шара с радиусами  $r_1$  и  $r_2$ . Найти радиус нового шара.

△ Объем нового шара равен сумме объемов имеющихся шаров. Поэтому, если  $R$  — объем нового шара, то

$$\frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi r_1^3 + \frac{4}{3} \pi r_2^3,$$

т. е.  $R = \sqrt[3]{r_1^3 + r_2^3}$ . ▲

2)\* Объем шарового слоя и шарового сегмента. Шаровой слой получается при вращении вокруг оси  $Ox$  криволинейной трапеции, соответствующей функции  $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ ,  $x \in [a; b]$  (рис. 256). Отрезки (и их длины)  $AD = r_1$  и  $BC = r_2$  (рис. 257) называются радиусами оснований шарового слоя, отрезок  $CD = H$  — его высотой.

Теорема 2. Объем шарового слоя, радиусы оснований которого равны  $r_1$  и  $r_2$ , а высота равна  $H$ , вычисляется по формуле

$$V = \frac{1}{6} \pi H (3r_1^2 + 3r_2^2 + H^2). \quad (2)$$

□ Для объема шарового слоя (см. рис. 258) согласно формуле (1) п. 1 получаем

$$V = \pi \int_a^b (R^2 - x^2) dx = \pi \left( R^2(b-a) - \frac{b^3 - a^3}{3} \right). \quad (3)$$

Так как высота шарового слоя  $H = b - a$ , то формула (2)

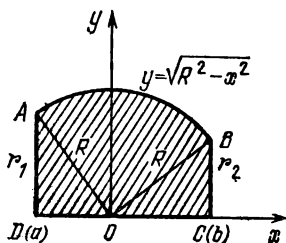


Рис. 257

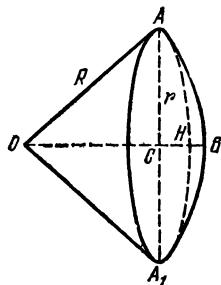


Рис. 258

преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} V &= \pi H \left( R^2 - \frac{b^2 + ab + a^2}{3} \right) = \pi H \left( R^2 - \frac{(b-a)^2 + 3ab}{3} \right) = \\ &= \pi H \left( R^2 - ab - \frac{H^2}{3} \right). \end{aligned}$$

Из прямоугольных треугольников  $AOD$  и  $BOC$  находим  $r_1^2 = R^2 - a^2$ ,  $r_2^2 = R^2 - b^2$ .

Следовательно,

$$r_1^2 + r_2^2 = 2R^2 - a^2 - b^2 = 2R^2 - (b-a)^2 - 2ab = 2R^2 - H^2 - 2ab,$$

и поэтому

$$R^2 - ab = \frac{r_1^2 + r_2^2 + H^2}{2}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} V &= \pi H \left( \frac{r_1^2 + r_2^2 + H^2}{2} - \frac{H^2}{3} \right) = \pi H \left( \frac{r_1^2 + r_2^2}{2} + \frac{H^2}{6} \right) = \\ &= \frac{1}{6} \pi H (3r_1^2 + 3r_2^2 + H^2). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Заметим, что если  $r_1 = r_2 = 0$  и  $H = 2R$ , то формула (2) превращается в формулу (1) для объема шара радиуса  $R$ . В частном случае, когда или  $r_1 = 0$ , или  $r_2 = 0$ , шаровой слой называют *шаровым сегментом*.

Следствие 1. Объем шарового сегмента с радиусом основания  $r$  и высотой  $H$  вычисляется по формуле

$$V = \frac{1}{6} \pi H (3r^2 + H^2). \quad (4)$$

□ Положив в формуле (2)  $r_1 = r$ ,  $r_2 = 0$ , получим формулу (4). ■

Следствие 2. Объем шарового сегмента радиуса  $R$  и высоты  $H$  вычисляется по формуле

$$V = \frac{1}{3} \pi H^2 (3R - H). \quad (5)$$

□ Из прямоугольного треугольника следует (см. рис. 258), что

$$AC^2 = OA^2 - OC^2,$$

т. е.  $r^2 = R^2 - (R - H)^2 = 2RH - H^2$ .

Подставив это выражение для  $r^2$  в формулу (4), получим формулу (5). ■

Задача 2. Два равных шара радиуса  $R$  расположены так, что центр одного лежит на поверхности другого. Найти объем общей части шаров.

△ Общая часть шаров состоит из двух равновеликих шаровых сегментов с высотой  $H = \frac{R}{2}$ . Поэтому по формуле (5) получаем

$$V = 2 \cdot \frac{1}{3} \pi H^2 (3R - H) = \frac{2}{3} \pi \frac{R^2}{4} \left( 3R - \frac{R}{2} \right) = \frac{5}{12} \pi R^3. \quad \blacktriangle$$

3) \* Шаровой сектор. Тело, полученное вращением кругового сектора вокруг его стороны, называется шаровым сектором.

Шаровой сектор, полученный вращением кругового сектора  $AOB$  (рис. 258), у которого угол  $AOB$  острый, состоит из конуса  $OAA_1$  и шарового сегмента  $ABA_1$ . Поэтому объем шарового сектора равен сумме объемов конуса и шарового сегмента.

Теорема 3. Объем шарового сектора радиуса  $R$  вычисляется по формуле

$$V = \frac{2}{3} \pi R^2 H, \quad (6)$$

где  $R$  — радиус шара, а  $H$  — высота соответствующего шарового сегмента.

□ Действительно, если  $H < R$ , то

$$V = \frac{1}{3} \pi H^2 (3R - H) + \frac{1}{3} \pi r^2 (R - H),$$

где первое слагаемое — объем шарового сегмента, а второе слагаемое — объем конуса. Так как  $r^2 = 2RH - H^2$ , то

$$V = \frac{1}{3} \pi H^2 (3R - H) + \frac{1}{3} \pi (2RH - H^2) (R - H) = \frac{2}{3} \pi R^2 H.$$

Аналогично рассматривается случай  $R < H$ . Если  $R = H$ , то очевидно, что формула (6) верна, так как шаровой сектор в этом случае представляет собой полушар. ■

**Задача 3.** Найти объем шарового сектора радиуса  $R$ , у которого угол в осевом сечении равен  $120^\circ$ .

△ В данном случае (см. рис. 258) угол  $AOB$  равен  $60^\circ$ , поэтому

$$H = OB - OC = R - R \cos 60^\circ = \frac{R}{2}.$$

По формуле (6) находим  $V = \frac{2}{3} \pi R^2 H = \frac{\pi}{3} R^3$ . ▲

### Вопросы для контроля

1. Напишите формулу для вычисления объема тела, полученного вращением вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции

$$0 \leq y \leq f(x), \quad a \leq x \leq b.$$

2. Чему равен объем прямого кругового конуса?

3. Площади оснований пирамиды и конуса равны  $Q$ , высоты равны  $H$ . Чему равны объемы этих тел?

4. Найдите объем шара, диаметр которого равен  $d$ .

### Упражнения

8.53. Образующая конуса равна  $\sqrt{6}$  см и составляет с плоскостью основания угол  $45^\circ$ . Найдите объем конуса.

8.54. Осевое сечение конуса — правильный треугольник со стороной 6 см. Найдите объем конуса.

8.55. Найдите объем конуса, диаметр основания которого равен 6 см, а угол между образующей и плоскостью основания равен  $30^\circ$ .

8.56. Угол при вершине осевого сечения конуса равен  $90^\circ$ , площадь сечения  $18 \text{ см}^2$ . Найдите объем конуса.

8.57. Через вершину конуса под углом  $\varphi$  к основанию проведена плоскость, отсекающая от окружности основания дугу  $\alpha$ ; расстояние от плоскости сечения до центра основания равно  $d$ . Определите объем конуса.

8.58. Прямоугольный треугольник с катетами 8 см и 15 см вращается около большего катета. Вычислите объем тела вращения.

8.59. Через вершину конуса под углом  $45^\circ$  к основанию проведена плоскость, отсекающая четверть окружности основания радиуса  $R = 3$  см. Вычислите объем конуса.

8.60. Треугольник со сторонами 10 дм, 17 дм и 22 дм вращается около большей стороны. Определите объем тела вращения.

8.61. Прямоугольный треугольник с площадью  $S$  и острым углом  $\alpha$  вращается вокруг оси, содержащей гипотенузу. Найдите объем тела вращения.

8.62. Равнобедренный треугольник, основание которого  $a$  и угол при основании равен  $\alpha$ , вращается вокруг оси, содержащей основание. Найдите объем тела вращения.

8.63. Прямоугольный треугольник с площадью  $S$  и острым углом  $\alpha$  вращается вокруг оси, проведенной через вершину прямого угла параллельно гипотенузе. Найдите объем тела вращения.

8.64. Равнобедренный треугольник, угол при вершине которого равен  $\beta$ , а боковая сторона равна  $b$ , вращается вокруг оси, содержащей боковую сторону. Найдите объем тела вращения.

8.65. Коническая куча зерна имеет высоту 2,4 м, а окружность основания 20 м. Сколько тонн зерна в куче, если масса  $1 \text{ м}^3$  зерна равна 750 кг?

8.66. Щебень укладывается в кучу, имеющую форму конуса с углом откоса  $33^\circ$ . Какой высоты должна быть куча, чтобы ее объем был равен  $10 \text{ м}^3$ ?

8.67. Радиусы оснований усеченного конуса равны 1 дм и 9 дм, образующая равна 1 м. Найдите объем конуса.

8.68. Радиусы оснований усеченного конуса и его высота относятся, как 3:6:4. Вычислите объем усеченного конуса, если его образующая равна 25 см.

8.69. Равнобедренная трапеция с острым углом  $60^\circ$  вращается вокруг оси, проходящей через ее боковую сторону. Вычислите объем тела вращения, если основания трапеции равны 6 см и 20 см.

8.70. Ромб со стороной  $a$  и острым углом  $\alpha$  вращается вокруг оси, проходящей через вершину острого угла перпендикулярно его стороне. Найдите объем тела вращения.

8.71. Ромб с большей диагональю  $d$  и острым углом  $\alpha$  вращается около прямой, параллельной стороне ромба и отстоящей на расстоянии  $d$  от точки пересечения диагоналей. Найдите объем тела вращения.

8.72. Бревно длиной 15,5 м имеет диаметры концов 42 см и 35 см. Найдите относительную погрешность, которую мы допускаем, вычисляя объем бревна умножением площади среднего поперечного сечения бревна на его длину.

8.73. Какое тело имеет больший объем: шар радиуса 1 дм или правильная треугольная призма, каждое ребро которой равно 2 дм?

8.74. Модель шара диаметром 12 см и модель куба с ребром 1 дм изготовлены из одного и того же материала. Масса какой из моделей меньше?

8.75. Радиус  $OM$  разбивает полукруг с диаметром  $AB$  на два сектора так, что угол  $AMB$  равен  $120^\circ$ . Найдите отношение объемов фигур, образованных вращением этих секторов вокруг оси  $AB$ .

8.76. Сечение шара плоскостью, перпендикулярной его диаметру, делит диаметр в отношении 1:2. Найдите отношение объемов частей шара.

8.77. Сечение шара плоскостью, перпендикулярной его радиусу, делит радиус пополам. Найдите отношение объемов частей шара.

8.78. Вычислите объем шарового сегмента, если радиус окружности его основания равен 56 см, а радиус шара 65 см.

8.79. Сектор  $AOB$  с углом  $AOB$ , равным  $30^\circ$ , вращается вокруг прямой  $ON$ , перпендикулярной  $OB$ . Найдите объем тела вращения, если радиус сектора  $R$ .

8.80. В шаре радиуса  $R$  выделен сектор с углом  $\alpha$  в осевом сечении. Найдите его объем.

**8.81.** В шаре, радиус которого равен 2 дм, просверлено цилиндрическое отверстие вдоль его диаметра. Вычислите объем оставшейся части, если радиус отверстия равен 1 дм.

**8.82.** Дуга осевого сечения шарового сектора равна  $120^\circ$ . Найдите отношение его объема к объему соответствующего шарового сегмента.

**8.83.** Вычислите объем шара, описанного около куба, ребро которого равно 1 м.

**8.84.** Сторона основания правильного тетраэдра равна  $a$ , двугранный угол при основании равен  $\varphi$ . Определите объем шара, вписанного в тетраэдр.

**8.85.** В шар, объем которого равен  $V$ , вписана прямая треугольная призма. Основанием призмы служит прямоугольный треугольник с острым углом  $\alpha$ , а наибольшая боковая грань есть квадрат. Найдите объем призмы.

**8.86.** В шар радиуса  $R$  вписан конус, образующая которого составляет с его высотой угол  $\alpha$ . Найдите объем конуса.

**8.87.** В шар радиуса  $R$  вписана четырехугольная пирамида, боковые ребра которой наклонены к плоскости основания пирамиды под углом  $\varphi$ . Определите объем пирамиды, если в ее основании лежит прямоугольник, диагональ которого составляет с большей стороной угол, равный  $\alpha$ .

**8.88.** Найдите объем шара, вписанного в правильную треугольную пирамиду с ребром основания, равным  $a$ , и плоским углом при вершине, равным  $\alpha$ .

**8.89.** В конус вписан шар, у которого площадь большого круга равна  $S$ . Найдите объем конуса, если угол между его высотой и образующей равен  $\alpha$ .

**8.90.** Около конуса описана пирамида. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник, один из острых углов которого равен  $\alpha$ . Определите объем конуса, если известно, что радиус его основания равен  $r$  и образующая наклонена к плоскости основания под углом  $\beta$ .

## § 36\*. Вычисление объемов произвольных призм, цилиндров и конусов

### 1. Объем произвольного цилиндра.

**Теорема 1.** Объем произвольного цилиндра равен произведению площади его основания на высоту, т. е.

$$V = QH, \quad (1)$$

где  $Q$  — площадь основания, а  $H$  — высота цилиндра.

□ Выберем за направление оси  $Ox$  направление, перпендикулярное плоскости основания данного цилиндра (рис. 259). Тогда цилиндр можно рассматривать как тело с параллельными сечениями, площадь которых равна  $Q$ . Поэтому, используя формулу (1) из п. 1 § 34, получаем

$$V = \int_0^H Q \, dx = Q \int_0^H dx = QH. \quad \blacksquare$$

Следствие 1. Объем призмы равен произведению площади ее основания на высоту.

□ Действительно, призма — это цилиндр, основанием которого является многоугольник. ■

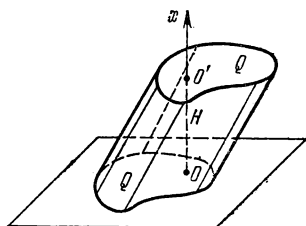


Рис. 259

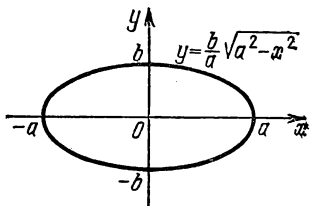


Рис. 260

Следствие 2. Если основание цилиндра ограничено эллипсом с полуосями  $a$  и  $b$ , то

$$V = \pi abH, \quad (2)$$

где  $H$  — высота цилиндра. В частности, если основанием цилиндра является круг радиуса  $R$ , то

$$V = \pi R^2 H. \quad (3)$$

□ Площадь основания (рис. 260) вычисляется по формуле

$$Q = 2 \int_{-a}^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

Для вычисления интеграла сделаем замену

$$\begin{aligned} x &= a \cos t, & t &\in [0; \pi]; \\ dx &= -a \sin t dt. \end{aligned}$$

Тогда

$$Q = 2ab \int_0^\pi \sin^2 t dt = ab \int_0^\pi (1 - \cos 2t) dt = \pi ab.$$

Следовательно, площадь фигуры, ограниченной эллипсом с полуосями  $a$  и  $b$ , равна  $\pi ab$ .

Подставив найденное значение для  $Q$  в формулу (1), получим формулу (2). В частности, если  $a = b = R$ , то получим формулу (3). ■

**Теорема 2.** Объем наклонного цилиндра равен произведению площади его перпендикулярного сечения на длину образующей.

Докажем эту теорему лишь в частном случае, когда цилиндр является призмой. Для призмы теорема 2 формулируется следующим образом:

*Объем наклонной призмы равен произведению площади ее перпендикулярного сечения на длину бокового ребра.*

□ Так как любую призму можно разбить на треугольные призмы, сумма объемов которых равна объему данной призмы, то доказательство достаточно провести для треугольной призмы.

Рассмотрим наклонную призму  $ABCA_1B_1C_1$  (рис. 261). Пусть  $l$  — длина бокового ребра,  $Q$  — площадь основания, а  $H$  — высота призмы. Через  $\alpha$  обозначим величину угла между плоскостью основания и плоскостью перпендикулярного сечения призмы.

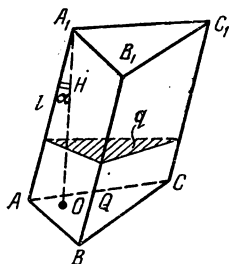


Рис. 261

Так как высота призмы  $OA_1$  образует с боковым ребром  $AA_1$  угол величины  $\alpha$ , то из  $\triangle AA_1O$  получаем:  $H = l \cos \alpha$ . Поэтому

$$V = QH = Ql \cos \alpha = ql,$$

где  $q = Q \cos \alpha$  — площадь перпендикулярного сечения призмы. ■

**Задача.** Длина бокового ребра треугольной призмы равна 15 см, а расстояния между боковыми ребрами равны 17 см, 25 см, 26 см. Найти объем призмы.

△ Перпендикулярное сечение данной призмы — это треугольник со сторонами длины 17 см, 25 см и 26 см. Как нетрудно подсчитать, его площадь равна  $204 \text{ см}^2$ . Поэтому в силу теоремы 2

$$V = 204 \text{ см}^2 \cdot 15 \text{ см} = 3060 \text{ см}^3. \blacktriangle$$

## 2. Объем произвольного конуса.

**Теорема.** Объем произвольного конуса равен одной трети произведения площади основания на высоту, т. е.

$$V = \frac{1}{3} QH, \quad (1)$$

где  $Q$  — площадь основания, а  $H$  — высота конуса.

□ Рассмотрим конус с вершиной  $S$  и основанием  $\Phi$  (рис. 262). Пусть площадь основания  $\Phi$  равна  $Q$ , а высота конуса равна  $H$ . Тогда существуют последовательности



многоугольников  $\Phi_n$  и  $\Phi'_n$  с площадями  $Q_n$  и  $Q'_n$  таких, что  $\Phi_n \subset \Phi \subset \Phi'_n$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} Q'_n = \lim_{n \rightarrow \infty} Q_n = Q$ .

Очевидно, что пирамида с вершиной  $S$  и основанием  $\Phi_n$  будет вписанной в данный конус, а пирамида с вершиной  $S$  и основанием  $\Phi'_n$  — описанной около конуса.

Объемы этих пирамид соответственно равны

$$V_n = \frac{1}{3} Q_n H \text{ и } V'_n = \frac{1}{3} Q'_n H.$$

Так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \lim_{n \rightarrow \infty} V'_n = \frac{1}{3} QH,$$

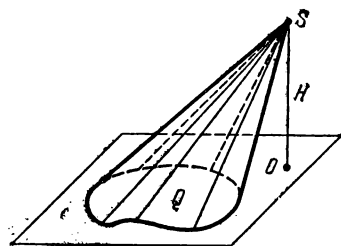


Рис. 262

то формула (1) доказана. ■

*Следствие. Объем конуса, основанием которого является эллипс с полуосями  $a$  и  $b$ , вычисляется по формуле*

$$V = \frac{1}{3} \pi abH. \quad (2)$$

*В частности, объем конуса, основанием которого является круг радиуса  $R$ , вычисляется по формуле*

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 H, \quad (3)$$

где  $H$  — высота конуса.

□ Как известно (п. 1 § 36), площадь эллипса с полуосями  $a$  и  $b$  равна  $\pi ab$ , и поэтому формула (2) получается из формулы (1) при  $Q = \pi ab$ . Если  $a = b = R$ , то получается формула (3). ■

#### Вопросы для контроля

1. Как формулируется теорема об объеме произвольного цилиндра?
2. Напишите формулу для вычисления объема кругового цилиндра с радиусом основания  $R$  и высотой  $H$ .
3. Площадь перпендикулярного сечения некоторой наклонной призмы  $1 \text{ м}^2$ , а высота  $10 \text{ дм}$ . Чему равен ее объем?
4. Сформулируйте теорему об объеме произвольного конуса.
5. Как записывается формула для объема кругового конуса с радиусом основания  $R$  и высотой  $H$ ?

## Упражнения

8.91. В наклонной призме стороны основания равны 4 см, 13 см и 15 см. Боковое ребро равно  $10\sqrt{2}$  см и наклонено к плоскости основания под углом  $45^\circ$ . Вычислите объем призмы.

8.92. В основании наклонной призмы лежит параллелограмм со сторонами 6 дм и 12 дм и острым углом  $60^\circ$ . Боковое ребро призмы равно 14 дм и составляет с плоскостью основания угол  $30^\circ$ . Найдите объем призмы.

8.93. В основании наклонного параллелепипеда лежит ромб с острым углом, равным  $\alpha$ . Каждое ребро параллелепипеда равно  $a$ . Боковое ребро, проходящее через вершину острого угла ромба, составляет со сторонами основания углы, равные  $\alpha$ . Найдите объем параллелепипеда.

8.94. В основании наклонной призмы лежит равносторонний треугольник со стороной, равной  $a$ . Одна из боковых граней призмы перпендикулярна плоскости основания и представляет собой ромб, диагональ которого равна  $b$ . Найдите объем призмы.

8.95. В основании призмы лежит равнобедренная трапеция, основания которой равны 28 см и 44 см, а боковые стороны равны 17 см. Одно из диагональных сечений призмы, перпендикулярное основанию, является ромбом с углом  $45^\circ$ . Найдите объем призмы.

8.96. Все грани параллелепипеда — ромбы с диагоналями 6 см и 8 см. Найдите объем параллелепипеда.

8.97. В наклонном параллелепипеде в основании лежит прямоугольник со сторонами  $a$  и  $b$ , а боковое ребро, равное  $c$ , составляет со смежными сторонами основания углы, равные  $\alpha$ . Найдите объем параллелепипеда.

## § 37. Площади поверхностей

1. **Площадь поверхности многогранника.** Площадью поверхности многогранника называется сумма площадей всех его граней.

**Задача 1.** Найти ребро правильного тетраэдра, если площадь его поверхности равна площади поверхности куба с ребром  $a$ .

$\Delta$  Все шесть граней куба — квадраты со стороной  $a$ . Поэтому площадь его поверхности  $S = 6a^2$ . Если ребро правильного тетраэдра равно  $b$ , то каждая из четырех его граней — правильный треугольник со стороной  $b$ . Площадь каждой грани равна  $\frac{\sqrt{3}}{4}b^2$  и, следовательно, площадь поверхности  $Q = \sqrt{3}b^2$ . По условию задачи  $S = Q$ , т. е.

$$6a^2 = \sqrt{3}b^2,$$

откуда

$$b = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt[4]{3}}a = \sqrt[4]{12}a \approx 1,8a. \blacktriangle$$

Площадью боковой поверхности призмы называется сумма площадей всех ее боковых граней. Поверхность призмы часто называют ее полной поверхностью.

Площадь поверхности призмы равна сумме площадей боковой поверхности призмы и двух ее оснований.

**Теорема.** *Площадь боковой поверхности призмы равна произведению периметра перпендикулярного сечения на длину бокового ребра призмы, т. е.*

$$S = p \cdot l,$$

где  $p$  — периметр перпендикулярного сечения, а  $l$  — длина бокового ребра.

□ Проведем доказательство для треугольной призмы (см. рис. 147). Пусть  $A'B'C'$  — перпендикулярное сечение призмы, а  $S_1, S_2, S_3$  — площади боковых граней  $ABB_1A_1, BCC_1B_1, CAA_1C_1$ .

Так как  $A'B' \perp BB_1$ , то  $BB_1$  — высота параллелограмма  $ABB_1A_1$ . Его площадь  $S_1 = A'B' \cdot BB_1 = A'B' \cdot l$ . Аналогично получаем

$$S_2 = B'C' \cdot l, \quad S_3 = A'C' \cdot l.$$

Следовательно,

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = (A'B' + B'C' + A'C') \cdot l = p \cdot l. \quad \blacksquare$$

**Следствие.** *Площадь  $S$  боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра  $P$  основания на высоту  $H$  призмы, т. е.*

$$S = P \cdot H.$$

□ В случае прямой призмы перпендикулярными сечениями являются ее основания, а длина бокового ребра — высотой призмы, т. е.  $p = P, l = H$ .  $\blacksquare$

**Задача 2.** Каждое ребро наклонной треугольной призмы равно  $a$ , одно из боковых ребер составляет со смежными сторонами основания углы в  $60^\circ$ . Найти площадь поверхности призмы.

△ Проведем плоскость через вершину  $B$  перпендикулярно ребру  $AA_1$  (рис. 263). Пусть  $D$  — точка пересечения этой плоскости с ребром  $AA_1$ . Треугольник  $BDC$  — перпендикулярное сечение призмы. Найдем его периметр  $P = BD + DC + BC = 2BD + BC$ . Так как  $BC = a$ , угол  $DAB$  равен  $60^\circ$  и  $BD = AB \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ , то  $P = \sqrt{3}a + a$ .

Боковое ребро призмы равно  $a$ , поэтому площадь боковой поверхности  $S = P \cdot l = (\sqrt{3}a + a)a$ .

Основания призмы — правильные треугольники со стороной  $a$ , поэтому сумма их площадей равна  $\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$ . Находим площадь поверхности призмы

$$Q = S + \frac{\sqrt{3}}{2}a^2 = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + 1\right)a^2. \blacktriangle$$

Площадью боковой поверхности пирамиды называется сумма площадей всех ее боковых граней. Поверхность пирамиды часто называют ее полной поверхностью. Площадь боковой поверхности пирамиды равна сумме площадей всех треугольников ее боковых граней, а площадь полной поверхности равна сумме площади боковой поверхности и площади основания. Площадь полной поверхности усеченной пирамиды равна сумме площадей ее боковой поверхности и двух ее оснований.

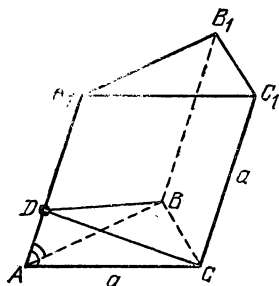


Рис. 263

**Задача 3.** Доказать, что площадь  $S$  боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра основания на апофему.

△ Обозначим ребро основания через  $a$ , апофему — через  $h$ . Каждая из боковых граней  $n$ -угольной правильной пирамиды является равнобедренным треугольником с основанием  $a$  и высотой  $h$ . Следовательно, площадь каждой боковой грани равна  $\frac{1}{2}ah$ , а сумма площадей всех боковых граней  $S = n \cdot \frac{1}{2}ah$ . Так как периметр основания  $P = na$ , то  $S = \frac{1}{2}Ph$ .  $\blacktriangle$

**Задача 4.** Доказать, что площадь  $S$  боковой поверхности правильной усеченной пирамиды равна половине произведения суммы периметров ее оснований на апофему.

△ Обозначим ребра оснований через  $a$  и  $b$ , апофему — через  $h$ . Каждая из  $n$  боковых граней является трапецией с основаниями  $a$  и  $b$  и высотой  $h$ . Следовательно, площадь каждой боковой грани равна  $\frac{a+b}{2}h$ , а сумма площадей

всех боковых граней  $S = n \cdot \frac{a+b}{2} h$ . Так как периметры оснований  $P = na$ ,  $P_1 = nb$ , то

$$S = \frac{1}{2} (P + P_1) h. \blacktriangle$$

2. **Площадь поверхности цилиндра и конуса.** За площадь боковой поверхности цилиндра принимается площадь развертки его боковой поверхности. Поэтому *площадь*

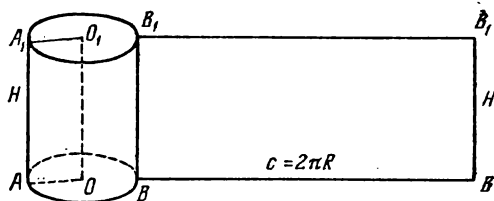


Рис. 264

*боковой поверхности прямого кругового цилиндра* равна площади соответствующего прямоугольника (рис. 264) и **вычисляется** по формуле

$$S = 2\pi R H, \quad (1)$$

где  $R$  — радиус основания, а  $H$  — высота цилиндра. Если к площади боковой поверхности цилиндра прибавить площади двух его оснований, то получим *площадь полной поверхности цилиндра*

$$Q = 2\pi R H + 2\pi R^2 = 2\pi R (H + R).$$

За площадь боковой поверхности конуса принимается площадь развертки его боковой поверхности. Поэтому *площадь боковой поверхности прямого кругового конуса* равна площади соответствующего кругового сектора (рис. 265) и **вычисляется** по формуле

$$S = \pi R L, \quad (2)$$

где  $R$  — радиус основания, а  $L$  — длина образующей конуса. Если к площади боковой поверхности конуса прибавить площадь его основания, то получим *площадь полной поверхности конуса*

$$Q = \pi R L + \pi R^2 = \pi R (L + R).$$

Аналогично за площадь боковой поверхности усеченного конуса принимается площадь соответствующей развертки. Поэтому в случае прямого кругового конуса

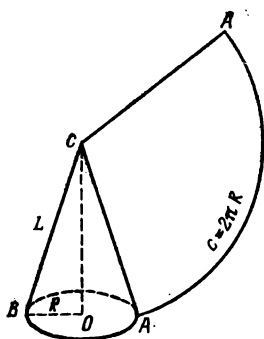


Рис. 265

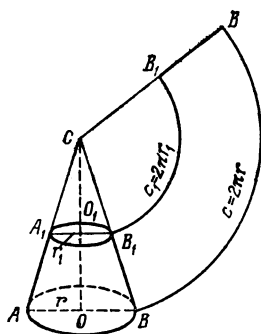


Рис. 266

(рис. 266) площадь боковой поверхности усеченного конуса вычисляется по формуле

$$S = \pi(r_1 + r)L,$$

где  $r_1$  и  $r$  — радиусы оснований, а  $L$  — длина образующей усеченного конуса.

**Задача.** В конус вписан цилиндр. Высота конуса в 4 раза больше высоты цилиндра, а длина образующей конуса в 6 раз больше высоты цилиндра. Найти отношение площадей боковых поверхностей конуса и цилиндра.

△ Пусть  $S_1$  и  $S_2$  — площади боковых поверхностей цилиндра и конуса (рис. 267). Тогда по формулам (1) и (2):

$$S_1 = 2\pi \cdot OA \cdot OO_1,$$

$$S_2 = \pi \cdot OB \cdot KB.$$

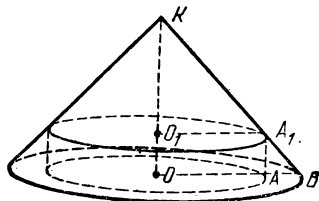


Рис. 267

По условию  $KB = 6OO_1$ . Поэтому  $\frac{S_2}{S_1} = \frac{3OB}{OA} = \frac{3OB}{O_1A_1}$ . Из подобных треугольников  $OBK$  и  $O_1A_1K$  находим

$$\frac{OB}{O_1A_1} = \frac{OK}{O_1K} = \frac{4}{3},$$

так как по условию  $OK = 4O_1O$ , т. е.  $\frac{OK}{O_1K} = \frac{4}{3}$ .

Следовательно,  $\frac{S_2}{S_1} = 3 \cdot \frac{4}{3} = 4$ , т. е. площадь боковой поверхности конуса в 4 раза больше площади боковой поверхности цилиндра. ▲

**3. Площадь поверхности вращения.** Площадь боковой поверхности для цилиндра и конуса была определена с помощью площади развертки. Однако не для любой поверхности такой способ пригоден. Например, нельзя «развернуть» на плоскость сферу.

Определим в общем случае площадь поверхности вращения и приведем формулу для ее вычисления.

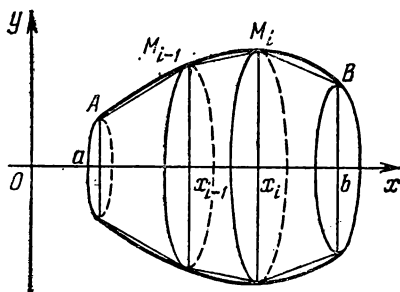


Рис. 268

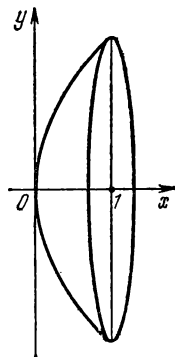


Рис. 269

Пусть дана дуга  $AB$  кривой (рис. 268), уравнение которой  $y = f(x)$ ,  $x \in [a; b]$ , где  $f(x)$  — неотрицательная функция, имеющая непрерывную производную.

Разобьем отрезок  $[a; b]$  точками

$$x_i = a + \frac{b-a}{n} i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

на  $n$  отрезков равной длины. Через точки  $x_i$  проведем прямые, параллельные оси  $Oy$ , точки пересечения этих прямых с дугой  $AB$  обозначим  $M_i$ .

Ломаная  $AM_1M_2\dots M_{n-1}B$  называется *вписанной* в дугу  $AB$ .

При достаточно мелком разбиении отрезка  $[a; b]$ , т. е. при достаточно большом  $n$ , площади поверхностей, образованных вращением вокруг оси  $Ox$ , дуги  $AB$  и вписанной в нее ломаной, будут мало отличаться друг от друга.

Поверхность, полученная вращением ломаной, состоит из боковых поверхностей  $n$  усеченных конусов (или цилиндров). Ее площадь мы умеем вычислять.

Предел, к которому стремится при  $n \rightarrow \infty$  площадь поверхности, образованной вращением ломаной  $AM_1 \dots M_{n-1}B$ , вписанной в  $AB$ , называется *площадью поверхности*, образованной вращением дуги  $AB$ .

Можно доказать, что площадь поверхности, образованной вращением кривой  $AB$  вокруг оси  $Ox$ , вычисляется по формуле

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx,$$

или, короче,

$$S = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2} dx. \quad (1)$$

**Задача 1.** Найти площадь поверхности, полученной вращением вокруг оси  $Ox$  дуги параболы  $y = 2\sqrt{x}$ ,  $0 \leq x \leq 1$  (рис. 269).

△ Так как  $y' = \frac{1}{\sqrt{x}}$ , то согласно формуле (1) площадь поверхности вращения будет выражаться формулой

$$S = 2\pi \int_0^1 2\sqrt{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x}} dx = 4\pi \int_0^1 \sqrt{1+x} dx,$$

откуда по формуле Ньютона—Лейбница получаем

$$S = 4\pi \cdot \frac{2}{3} (1+x)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{8\pi}{3} (2^{3/2} - 1). \blacktriangle$$

Если кривая  $AB$  задана параметрическими уравнениями  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ ,  $t \in [\alpha; \beta]$ , где  $\varphi(t)$  и  $\psi(t)$  имеют непрерывные производные, то

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} |\psi(t)| \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt.$$

или, короче,

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} |y| \sqrt{x'^2 + y'^2} dt. \quad (2)$$

**Задача 2.** Вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси  $Ox$  дуги циклоиды

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases} \quad t \in [0; 2\pi].$$



△ Так как  $x' = a(1 - \cos t)$  и  $y' = a \sin t$ , то по формуле (2) получаем

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} dt = \\ &= 2\pi a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) \sqrt{2(1 - \cos t)} dt = \\ &= 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \sin^3 \frac{t}{2} dt = 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - \cos^2 \frac{t}{2}\right) \sin \frac{t}{2} dt. \end{aligned}$$

Сделаем замену:  $u = \cos \frac{t}{2}$ ,  $du = -\frac{1}{2} \sin \frac{t}{2} dt$ . Тогда

$$S = 16\pi a^2 \int_{-1}^1 (1 - u^2) du = \frac{64}{3} \pi a^2. \blacktriangle$$

#### 4. Площадь сферы и ее частей.

##### 1) Сфера.

Теорема 1. Площадь сферы радиуса  $R$  вычисляется по формуле

$$S = 4\pi R^2. \quad (1)$$

□ Сфера радиуса  $R$  может быть получена вращением вокруг оси  $Ox$  полуокружности, заданной уравнением

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}, \quad x \in [-R; R].$$

Тогда по формуле для площади поверхности вращения получаем

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_{-R}^R y \sqrt{1 + y'^2} dx = 2\pi \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}} dx = \\ &= 2\pi \int_{-R}^R R dx = 4\pi R^2. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

2)\* Сферический пояс и сферический сегмент. Сферический пояс получается вращением вокруг оси  $Ox$  дуги окружности  $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ ,  $x \in [a; b]$  (рис. 270);  $H = b - a$  называется высотой сферического пояса,  $R$  — его радиусом.

Теорема 2. Площадь сферического пояса радиуса  $R$  и высоты  $H$  вычисляется по формуле

$$S = 2\pi RH. \quad (2)$$

□ По формуле для площади поверхности вращения так же, как и для сферы, получаем

$$S = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2} dx = 2\pi \int_a^b R dx = 2\pi R (b - a) = 2\pi RH. \blacksquare$$

*Сферический сегмент* получается вращением дуги окружности

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}, \quad a \leq x \leq R,$$

вокруг оси  $Ox$ . Следовательно, сферический сегмент есть частный случай сферического пояса ( $b = R$ ).

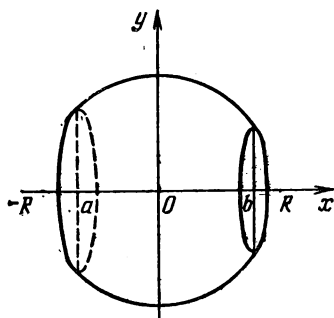


Рис. 270

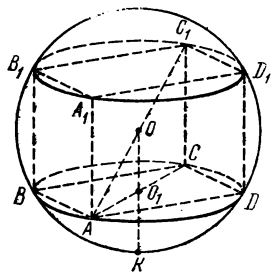


Рис. 271

*Следствие. Площадь сферического сегмента радиуса  $R$  и высоты  $H$  вычисляется по формуле (2).*

*Задача. В сферу вписан куб с ребром  $a$  (рис. 271). Найти площади:*

- сферы;
- сферического пояса, отсекаемого плоскостями верхней и нижней граней куба;
- сферического сегмента, отсекаемого плоскостью нижней грани куба.

△ а) Диагональ куба с ребром  $a$  равна  $\sqrt{3}a$ . Следовательно,  $AC_1 = \sqrt{3}a$ . С другой стороны, если  $R$  — радиус сферы, то  $AC_1 = 2R$ . Поэтому  $2R = \sqrt{3}a$ , т. е.  $R = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ . По формуле (1) находим площадь  $S$  сферы:

$$S = 4\pi R^2 = 4\pi \frac{3}{4} a^2 = 3\pi a^2.$$

б) Высота сферического пояса в данном случае, очевидно, равна  $a$ . Положив в формуле (2)  $H = a$  и  $R = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ , найдем площадь  $S_1$  сферического пояса

$$S_1 = 2\pi RH = 2\pi \frac{\sqrt{3}}{2} a^2 = \pi \sqrt{3} a^2.$$

в) Высота сферического сегмента равна длине отрезка  $O_1K$ . Вычислим ее:

$$H = O_1K = OK - OO_1 = R - \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a - \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}a.$$

Положив в формуле (2)  $H = \frac{\sqrt{3}-1}{2}a$  и  $R = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ , найдем площадь  $S_2$  сферического сегмента:

$$S_2 = 2\pi RH = 2\pi \frac{\sqrt{3}}{2}a \frac{\sqrt{3}-1}{2}a = \pi \frac{3-\sqrt{3}}{2}a^2. \quad \blacktriangle$$

#### Вопросы для контроля

1. Как вычисляется площадь поверхности многогранника?
2. Найдите площадь поверхности правильного октаэдра с ребром  $a$ .
3. Как вычисляется боковая поверхность: а) призмы; б) пирамиды; в) усеченной пирамиды?
4. Что представляет собой развертка: а) прямого кругового цилиндра; б) прямого кругового конуса?
5. Запишите формулу для вычисления площади боковой поверхности прямого цилиндра с радиусом основания  $R$  и высотой  $H$ .
6. Как вычисляется боковая поверхность прямого конуса с радиусом основания  $R$  и образующей  $L$ ?
7. Найдите площадь сферы, диаметр которой равен  $d$ .

#### Упражнения

8.98. Полная поверхность прямоугольного параллелепипеда равна  $352 \text{ см}^2$ . Найдите его измерения, если они относятся как 1:2:3.

8.99. В прямом параллелепипеде стороны основания 6 м и 8 м образуют угол в  $30^\circ$ ; боковое ребро равно 5 м. Найдите полную поверхность этого параллелепипеда.

8.100. В прямом параллелепипеде стороны основания 3 см и 8 см; угол между ними  $60^\circ$ . Боковая поверхность равна  $220 \text{ см}^2$ . Найдите полную поверхность.

8.101. Расстояния между боковыми ребрами наклонной треугольной призмы: 2 см, 3 см и 4 см, а боковые ребра 5 см. Найдите боковую поверхность призмы.

8.102. По стороне основания  $a$  и боковому ребру  $b$  найдите полную поверхность правильной призмы: 1) треугольной; 2) четырехугольной; 3) шестиугольной.

8.103. Докажите, что боковая поверхность правильной пирамиды равна площади основания, деленной на косинус угла между плоскостью боковой грани и плоскостью основания.

8.104. У двух правильных многогранников ребра равны, а поверхности относятся, как  $\sqrt{3}:6$ . Что это за многогранники?

8.105. Если обозначить ребро правильного многогранника через  $a$ , то его поверхность равна  $S = 5a^2 \sqrt{3}$ . Определите, какой это многогранник.

8.106. Площадь поверхности правильного тетраэдра равна  $S$ . Найдите его объем.

8.107. Ромб с диагоналями 12 см и 16 см служит основанием пирамиды. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей и равна 6,4 см. Найдите полную поверхность пирамиды.

8.108. Полная поверхность правильной четырехугольной пирамиды равна  $108 \text{ см}^2$ . Двугранный угол при основании равен  $60^\circ$ . Вычислите объем пирамиды.

8.109. По стороне основания  $a$  и высоте  $H$  найдите полную поверхность правильной пирамиды: 1) треугольной; 2) четырехугольной; 3) шестиугольной.

8.110. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде стороны оснований 8 см и 2 см. Высота 4 см. Найдите полную поверхность.

8.111. Стороны основания правильной усеченной четырехугольной пирамиды 40 см и 10 см. Площадь полной поверхности пирамиды равна  $3400 \text{ см}^2$ . Вычислите объем усеченной пирамиды.

8.112. Бассейн для воды, объем которого равен  $32 \text{ м}^3$ , имеет форму правильной четырехугольной призмы. Дно и боковые стены бассейна надо покрыть плитками. Какими надо выбрать размеры бассейна, чтобы на его облицовку пошло наименьшее количество плиток? Сколько потребуется плиток, если их размер  $20 \text{ см} \times 20 \text{ см}$ ?

8.113. Площадь осевого сечения цилиндра равна  $Q$ . Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

8.114. Диагональ развертки боковой поверхности цилиндра равна  $l$  и составляет со стороной развертки, соответствующей окружности основания цилиндра, угол  $\alpha$ . Найдите площадь полной поверхности цилиндра.

8.115. Отрезок, соединяющий диаметрально противоположные точки верхнего и нижнего оснований цилиндра, равен 10 см и наклонен к плоскости основания под углом  $60^\circ$ . Найдите площадь боковой и полной поверхностей цилиндра.

8.116. Сколько квадратных метров жести израсходовано на изготовление 1 млн. консервных банок диаметром 10 см и высотой 5 см (на швы и отходы добавить 10% материала)?

8.117. Высота цилиндра равна  $H$ , диагональ осевого сечения составляет угол  $\varphi$  с плоскостью основания. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

8.118. Сторона прямоугольника равна  $h$ , угол между его диагоналями равен  $\varphi$ . Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, образованного при вращении прямоугольника вокруг оси, содержащей данную сторону.

8.119. Квадрат со стороной  $a$  вращается около оси, параллельной его стороне и отстоящей от ближайшей стороны на ее длину. Найдите площадь поверхности тела вращения.

8.120. Образующая конуса равна  $l$ , угол при вершине осевого сечения  $\varphi$ . Найдите площади боковой и полной поверхностей конуса.

8.121. Площадь основания конуса  $P$ , длина образующей  $l$ . Найдите площади боковой и полной поверхностей конуса.

8.122. Коническая крыша силосной башни имеет диаметр 6 м и высоту 2 м. Сколько листов кровельного железа потребуется для этой крыши, если размер листа  $0,7 \times 1,4$  м, а на швы и обрезки тратится 10% от общей площади крыши?

8.123. Прямоугольный треугольник с катетом  $a$  и противолежащим ему углом  $30^\circ$  вращается вокруг гипотенузы. Найдите площадь поверхности полученной фигуры вращения.

8.124. Равнобедренный треугольник, длина основания которого  $b$ , а угол при вершине  $\varphi$ , вращается вокруг основания. Найдите площадь поверхности полученной фигуры вращения.

8.125. Стороны параллелограмма равны  $a$  и  $b$ , а угол между ними  $\alpha$ . Найдите площадь поверхности тела, образованного вращением параллелограмма вокруг стороны  $b$ .

8.126. Вычислите площади поверхностей, образованных вращением следующих кривых вокруг оси  $Ox$ :

$$1) y = x^3, \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2};$$

$$2) y^2 = 2px, \quad 0 \leq x \leq \frac{p}{2};$$

$$3) y = \sin x, \quad 0 \leq x \leq \pi;$$

$$4) x^2 + (y-b)^2 = a^2 \quad (b \geq a);$$

$$5) \begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t; \end{cases} \quad 6) \begin{cases} x = t^2, \\ y = \frac{t}{3} (t^2 - 3), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \sqrt{3};$$

$$7) \begin{cases} x = 2 \cos t - \cos 2t, \\ y = 2 \sin t - \sin 2t. \end{cases}$$

8.127. В шаре по одну сторону от центра проведены два параллельных сечения, площади которых равны  $49\pi \text{ дм}^2$  и  $4\pi \text{ м}^2$ . Найдите площадь поверхности шара, если расстояние между сечениями равно 9 дм.

8.128. Ребро куба равно  $a$ . Сфера проходит через четыре вершины нижнего основания куба и касается четырех ребер его верхнего основания. Найдите площадь сферы.

8.129. Найдите площадь сферического пояса, если радиусы его оснований 20 м и 24 м, а радиус сферы 25 м.

8.130. На каком расстоянии от центра сферы радиуса  $R$  находится точечный источник света, если он освещает треть поверхности сферы?

8.131. Найдите площадь той части земной поверхности (считая радиус земного шара равным 6400 км), которую видит космонавт из космического корабля на высоте 300 км от поверхности Земли.

У к а з а н и е. Видимую часть земной поверхности считать сферическим сегментом.

8.132. Максимальное удаление космического корабля «Восток» от поверхности Земли было 302 км, минимальное — 175 км. Какой процент земной поверхности мог видеть Ю. А. Гагарин в эти моменты? Радиус Земли — 6370 км.

## ОТВЕТЫ

### Глава 1

- 1.1. 1) 10 Н; 2)  $\sqrt{13-6\sqrt{2}}$  Н; 3)  $\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}$ .
- 1.2.  $\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}+\vec{OD}=\vec{0}$ ;  $\angle(\vec{OA}; \vec{OB})=90^\circ$ .
- 1.3.  $\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}=\vec{0}$ ;  $\angle(\vec{OA}; \vec{OB})=120^\circ$ .
- 1.5.  $\vec{OA}_1+\vec{OA}_2+\dots+\vec{OA}_n=\vec{0}$ .
- 1.8. 1)  $k=\pm 1$ ; 2)  $|k|>1$ ; 3)  $|k|<1$ ; 4)  $|k|>3$ ; 5)  $|k|<5$ .
- 1.9. 1)  $\frac{5}{|a|}$ ; 2)  $-\frac{1}{|a|}$ ; 3)  $-\frac{1}{3|a|}$ .
- 1.10.  $\vec{AB}=-\frac{1}{2}\vec{PM}$ . 1.12.  $AM:MB=\beta:\alpha$ .
- 1.14.  $BO:ON=\frac{n}{m}\left(\frac{p}{q}+1\right)$ ,  $CO:OM=\frac{q}{p}\left(\frac{m}{n}+1\right)$ .
- 1.15.  $DO:BO=\frac{m+n}{2}$ .
- 1.19.  $\vec{BC}=\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})$ ,  $\vec{CB}=\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b})$ ,  $\vec{BD}=-\vec{a}$ ;  $\vec{AD}+\vec{CD}=-\vec{a}$ .
- 1.20.  $\vec{BD}=\vec{b}-\vec{a}$ ,  $\vec{OB}=\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b})$ ,  $\vec{AC}=\vec{a}+\vec{b}$ ,  $\vec{CO}=-\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$ .
- 1.21.  $\vec{AB}=2\vec{m}$ ,  $\vec{CD}=2\vec{n}-2\vec{m}$ ,  $\vec{BC}=2\vec{n}$ ,  $\vec{AM}=3\vec{n}+\vec{m}$ ,  $\vec{AN}=2\vec{m}+\vec{n}$ ,  $\vec{MN}=\vec{m}-2\vec{n}$ .
- 1.22. 1)  $\frac{2}{3}\vec{OA}+\frac{2}{3}\vec{OB}$ ; 2)  $\vec{OA}+\vec{OB}$ .
- 1.23.  $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ ,  $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$ ,  $\left(-\frac{1}{6}; \frac{1}{3}\right)$ .
- 1.24.  $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ ,  $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$ ,  $\left(\frac{1}{2}; -1\right)$ .
- 1.25.  $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ ,  $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ ,  $(1; 0)$ ,  $\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ ,  $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ ,  $(1; 1)$ ,  $\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$ ,  $(-1; 1)$ ,  $\left(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ ,  $(2; 0)$ .
- 1.26.  $\left(\frac{AC}{AB+AC}; \frac{AB}{AB+AC}\right)$ . 1.27. 1)  $(1; 2)$ ; 2)  $(-2; 1)$ .
- 1.28.  $(5; 0)$ ,  $(2; 4)$ ,  $(5; 0)$ ,  $(2; -2)$ ,  $\left(2; \frac{3}{2}\right)$ ,  $\left(\frac{1}{3}; -4\right)$ .

- 1.29. 1)  $\sqrt[3]{5}$ ; 2)  $\sqrt[3]{5}$ ; 3)  $3\sqrt[3]{2}$ .  
 1.30.  $\sqrt[3]{7}$ . 1.31. 1) (3; 12); 2) (-3; 2).  
 1.32.  $\left(\frac{nx_1+mx_2}{n+m}; \frac{ny_1+my_2}{n+m}\right); \left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ .  
 1.33.  $\left(\frac{nx_1-mx_2}{n-m}; \frac{ny_1-my_2}{n-m}\right)$ .  
 1.34. 1) (-3; 16); 2) (9; -20).  
 1.35.  $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}; \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$ .  
 1.36.  $AB=(-4; 3)$ ,  $\vec{BA}=(4; -3)$ ,  $AB=5$ ,  $e=\left(\frac{4}{5}; -\frac{3}{5}\right)$ .  
 1.37. 1)  $A(-3; -2)$ ,  $B(5; 1)$ ; 2)  $A(3; 2)$ ,  $B(-5; -1)$ .  
 3)  $A(-2; 3)$ ,  $B(1; -5)$ .  
 1.38. (7; 14), (-7; -14).  
 1.39.  $B\left(4+\frac{5}{2}\sqrt[3]{3}; \frac{3}{2}\right)$ ,  $C\left(3+\frac{5}{2}\sqrt[3]{3}; \frac{3}{2}+\sqrt[3]{3}\right)$ ,  
 $D\left(3; \sqrt[3]{3}-1\right)$ .  
 1.40.  $A(2\sqrt[3]{2}; 45^\circ)$ ,  $B(3\sqrt[3]{2}; 135^\circ)$ ,  $C(4; 225^\circ)$ ,  $D(2; 315^\circ)$ .  
 1.41.  $A\left(\frac{3}{2}; \frac{\sqrt[3]{3}}{2}\right)$ ,  $B\left(-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt[3]{3}}{2}\right)$ ,  $C(-6; 0)$ ,  
 $D\left(\frac{3}{2}; -\frac{\sqrt[3]{3}}{2}\right)$ .  
 1.42.  $(a; 0^\circ)$ ,  $(a\sqrt[3]{3}; 30^\circ)$ ,  $(2a; 60^\circ)$ ,  $(a\sqrt[3]{3}; 90^\circ)$ ,  $(a; 150^\circ)$ .  
 1.43.  $24 \cos \alpha$ ;  $12\sqrt[3]{2}$ ;  $24$ ;  $-12\sqrt[3]{2}$ ;  $0$ ;  $-24$ .  
 1.44.  $a \cdot b = 10$ ;  $a^2 = 25$ ;  $(a-2b) \cdot (a+2b) = -39$ ;  $(a-b)^2 = 61$ ;  
 $(7a+b)^2 = 1101$ .  
 1.45.  $-\frac{3}{2}$ . 1.46.  $\left(\frac{4}{5}; \frac{3}{5}\right)$ ,  $\left(-\frac{4}{5}; -\frac{3}{5}\right)$ .  
 1.48. 1) (8; 6); 2) (-6; 10).  
 1.49. 1) 4; 2) 0; 3) 4.  
 1.50. 1)  $\frac{8}{\sqrt[3]{65}}$ ; 2)  $\frac{7}{\sqrt[3]{65}}$ ; 3) 0; 4)  $\frac{-3}{\sqrt[3]{10}}$ .  
 1.51. 1)  $2\sqrt[3]{5}$ ; 2) 2; 3)  $2\sqrt[3]{5}$ . 1.52.  $45^\circ$ .  
 1.53. 1) 0; 2) -4; 3) 2.  
 1.54.  $\frac{1}{2} \arccos \frac{4}{5}$ ;  $\frac{1}{2} \arccos \frac{4}{5}$ ;  $180^\circ - \arccos \frac{4}{5}$ .

## Глава 2

- 2.1. 1), 2), 4) да; 3) нет. 2.3. 1) Да; 2) нет.  
 2.4. 1)  $\begin{cases} x = -1 + 3t, \\ y = 2 + 2t; \end{cases}$  2)  $\begin{cases} x = t, \\ y = 1; \end{cases}$  3)  $\begin{cases} x = 3 + t, \\ y = -2 + 3t; \end{cases}$   
 4)  $\begin{cases} x = 2, \\ y = -3t. \end{cases}$   
 2.7. 1)  $\frac{x-3}{1} = \frac{y+4}{-4}$ ; 2)  $x = 1$ ; 3)  $\frac{x-\frac{1}{2}}{-3} = \frac{y-1,5}{-2}$ ; 4)  $y = -3$ .  
 2.9.  $x = 2$ . 2.10. (3; -7),  $a = (5; 4)$ .

- 2.11.  $y=1$ . 2.12.  $\begin{cases} x=2-7t, \\ y=-1+11t. \end{cases}$
- 2.13. 1)  $9x-y+15=0$ ; 2)  $x-7y+17=0$ ; 3)  $3x-5y-1=0$ ;  
4)  $2x+3y=0$ .
- 2.14.  $\frac{x}{9}+\frac{y}{6}=1$ . 2.15.  $\frac{x}{5}+\frac{y}{5}=1$ .
- 2.16. 1)  $(4; 0), (0; -6)$ ; 2)  $\left(-\frac{3}{2}; 0\right), (0; 4)$ .
- 2.17.  $(-3; 1)$ . 2.18. 6 кв. ед.
- 2.19.  $\frac{x}{4}+\frac{y}{2}=1$ . 2.20.  $x+y-6=0$ .
- 2.21.  $\pm 2x+y-8=0$ . 2.22. 20 кв. ед.
- 2.23. (MP):  $3x-y-2=0$ ; (NE):  $x-5y+4=0$ ; (ND):  $x+3y-12=0$ .
- 2.24. (AB):  $2x-y+5=0$ ; (BC):  $2x+y-9=0$ ; (AC):  $2x-5y-15=0$ ; (AA<sub>1</sub>):  $x-y=0$ ; (BB<sub>1</sub>):  $10x-y-3=0$ ; (CC<sub>1</sub>):  $2x+7y-3=0$ ;  $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$ .
- 2.25.  $2x-3y+4=0$ . 2.26.  $2x-3y=0$ .
- 2.28.  $4x-y-11=0$ . 2.29.  $3x-2y-13=0$ .
- 2.31.  $(-5; 6)$ ,  $n=\left(-3; \frac{1}{7}\right)$ . 2.32.  $4x+y-5=0$ .
- 2.34.  $y=4$ . 2.35.  $2x+5y-26=0$ . 2.36.  $x-y-7=0$ .
- 2.37.  $2x+5y-4=0$  и  $2x+5y+25=0$ .
- 2.38.  $x-y+7=0$ .
- 2.39.  $2x+3y+2=0$ ,  $3x-2y+3=0$ ,  $y=0$ .
- 2.40. 1)  $x-2y-5=0$ ,  $n=(1; -2)$ ; 2)  $4x-3y-10=0$ ,  $n=(4; -3)$ ; 3)  $2x+3y-6=0$ ,  $n=(2; 2)$ ; 4)  $x-15y-20=0$ ,  $n=(1; -15)$ .
- 2.41. 1)  $\frac{x}{3}+\frac{y}{-2}=1$ ; 2)  $\frac{x-3}{3}=\frac{y}{2}$ ; 3)  $\begin{cases} x=3+3t, \\ y=2t. \end{cases}$
- 2.43. 1)  $(3; 2)$ ; 2)  $(4; 3)$ ; 3)  $(2; 5)$ ; 4)  $(3; 2)$ ; 5) не пересекаются.
- 2.44.  $\left(\frac{11}{6}; \frac{35}{6}\right)$ ;  $(-3; 1)$ ;  $\left(9\frac{3}{7}; -9\frac{5}{14}\right)$ ;
- 2.45.  $(-2; 5)$ ;  $(1; -3)$ ;  $(5; -9)$ ;  $(8; -17)$ .
- 2.46.  $(1; 3)$ ;  $(2; 1)$ ;  $(5; 4)$ ;  $(6; 2)$ .
- 2.48.  $x=4$ ;  $y=-3$ . 2.49.  $x=5$ ;  $y=-2$ .
- 2.50.  $y=\frac{2}{3}x$ . 2.51.  $k=\frac{1}{5}$ . 2.52.  $\alpha=135^\circ$ .
- 2.53.  $k=1$ . 2.54.  $k=-\frac{1}{4}$ .
- 2.56. 1)  $\alpha=135^\circ$ ; 2)  $\alpha=60^\circ$ ; 3)  $\alpha=0^\circ$ ; 4)  $\alpha=90^\circ$ .
- 2.57.  $\alpha \approx 121^\circ$ . 2.58.  $k=\frac{3}{7}$ . 2.59.  $\operatorname{tg} \alpha=\frac{3}{4}$ ,  $b=\frac{13}{4}$ .
- 2.60. Первая прямая. 2.61.  $y=-2x-4$ .
- 2.62. 1)  $\varphi=60^\circ$ ; 2)  $\varphi=60^\circ$ ; 3)  $\varphi \approx 44^\circ$ ; 4)  $\varphi \approx 53^\circ$ ; 5)  $\varphi=0^\circ$ .
- 2.63. 1) Параллельны; 2) не перпендикулярны; 3) не перпендикулярны и не параллельны.
- 2.64.  $b=18$ . 2.65.  $a=\frac{1}{4}$ .
- 2.66. 1)  $\varphi=45^\circ$ ; 2)  $\varphi=45^\circ$ ; 3)  $\varphi \approx 38^\circ$ ; 5)  $\varphi=90^\circ$ .
- 2.67. 1) Параллельны; 2) перпендикулярны; 3) не параллельны и не перпендикулярны.



2.68.  $a=1$ . 2.69.  $b=1$ .

2.70. 1) Совпадают; 2) (4; -4); 3) параллельны; 4) параллельны.

2.71. 1)  $\varphi=45^\circ$ ; 2)  $\varphi=60^\circ$ ; 3)  $\varphi \approx 53^\circ$ ; 4)  $\varphi \approx 63^\circ$ ; 5)  $\varphi=0^\circ$ .

2.72. 1) Параллельны; 2) перпендикулярны; 3) не параллельны и не перпендикулярны.

2.73.  $a=-3$ . 2.74.  $a=-\frac{1}{5}$ . 2.75. 1)  $k=\frac{3}{4}$ ; 2)  $k=-\frac{4}{3}$ .

2.76. 1)  $2x-3y-23=0$ ; 2)  $3x+2y-2=0$ .

2.77.  $12x-18y+83=0$ . 2.78.  $x-y-17,5=0$ .

2.79.  $x+y-4=0$ . 2.80. 1), 4), 5).

2.81. 1)  $\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - 5 = 0, d=5$ ; 2)  $-\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 20 = 0, d=20$ ;

3)  $-x-5=0, d=5$ ; 4)  $-\frac{15}{3}x + \frac{12}{13}y - 2 = 0, d=2$ ; 5)  $-\frac{5}{13}x - \frac{12}{13}y - 13 = 0, d=13$ .

2.82.  $\frac{6}{\sqrt{13}}$ . 2.83.  $\frac{1}{\sqrt{5}}x - \frac{1}{\sqrt{5}}y \pm 3 = 0$ .

2.84. 1) 5; 2) 10. 2.85. 1) 2,5; 2) 3; 3) 6,5.

2.86.  $\frac{8}{\sqrt{13}}$ . 2.87.  $5x+4y-23=0, d=\frac{3}{\sqrt{41}}$ .

2.88.  $4x+3y+16=0, 4x+3y-14=0$ . 2.89.  $6x+4y-3=0$ .

2.90.  $4x+y-6=0, 3x+2y-7=0$ .

### Глава 3

3.1. 1)  $x^2+y^2=16$ ; 2)  $x^2+y^2=\frac{16}{9}$ ; 3)  $(x+4)^2+(y-2)^2=25$ ;

4)  $(x+1)^2+\left(y+\frac{3}{5}\right)^2=\frac{49}{25}$ .

3.2. 1) (0; 0),  $R=6$ ; 2) (0; 0),  $R=\sqrt{7}$ ; 3) (5; 3),  $R=7$ ;

4)  $\left(-7; -\frac{1}{2}\right)$ ,  $R=8$ ; 5) (2,5; 0),  $R=5\sqrt{2}$ .

3.3. 1) (1; -2),  $R=5$ ; 2) (3; -5),  $R=5$ .

3.4.  $x^2+y^2=9$ . 3.5.  $(x-3)^2+(y-7)^2=49$ .

3.6.  $(x-2)^2+(y-3)^2=4$ . 3.7.  $(x-2)^2+(y+1)^2=25$ .

3.8.  $(x-5)^2+y^2=9, (x-11)^2+y^2=9$ .

3.9.  $(x-2)^2+(y\pm 3)^2=9$ .

3.10.  $(x-1)^2+(y-1)^2=1, (x-5)^2+(y-5)^2=25$ .

3.11. 1) Вне окружности; 2) на окружности; 3) внутри окружности; 4) вне окружности; 5) внутри окружности; 6) вне окружности.

3.12. 1) Пересекает; 2) касается; 3) проходит вне окружности.

3.13.  $3x+2y-6=0$ . 3.14.  $(x-6)^2+(y-6)^2=25$ .

3.15.  $(x+2)^2+y^2=4$ ; (0; 0), (-2; 2), (-2; -2).

3.16.  $(x-1,5)^2+(y-2)^2=6,25$ .

3.17.  $(x-3,1)^2+(y+2,3)^2=22,1$ .

3.18.  $\left(-\frac{19}{25}; 6\frac{17}{25}\right)$ , (-2; -2). 3.19.  $3x-4y=0$ .

3.20. 8. 3.21.  $(x+2)^2+(y+1)^2=40$ .

3.22.  $(x-5)^2+(y+2)^2=1$ . 3.23.  $x^2+y^2=2$ .

- 3.24.  $\begin{cases} x=5 \cos t, \\ y=5 \sin t. \end{cases}$  3.25.  $(-4; 0)$ .
- 3.26.  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ . 3.27.  $\frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{9} = 1$ .
- 3.28.  $(-3; 0), (3; 0), 2c=6$ .
- 3.29. 1)  $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{9} = 1$ ; 2)  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ ; 3)  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ ; 4)  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ .
- 3.30. 1)  $a=4, b=3, (4; 0), (-4; 0), (0; 3), (0; -3), F_1(\sqrt{7}; 0), F_2(-\sqrt{7}; 0)$ ; 2)  $a=2, b=\frac{2}{3}, (2; 0), (-2; 0), (0; \frac{2}{3}), (0; -\frac{2}{3}), F_1(\frac{4\sqrt{2}}{3}; 0), F_2(-\frac{4\sqrt{2}}{3}; 0)$ ; 3)  $a=\frac{1}{2}, b=\frac{1}{3}, (\frac{1}{2}; 0), (-\frac{1}{2}; 0), (0; \frac{1}{3}), (0; -\frac{1}{3}), F_1(\frac{\sqrt{5}}{6}; 0), F_2(-\frac{\sqrt{5}}{6}; 0)$ ; 4)  $a=2, b=1, (2; 0), (-2; 0), (0; 1), (0; -1), F_1(\sqrt{3}; 0), F_2(-\sqrt{3}; 0)$ .
- 3.31.  $(-3; \frac{8}{5}), (-3; -\frac{8}{5})$ . 3.32.  $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{4} = 1$ .
- 3.33.  $a=5, b=3, 2c=8, F_1(4; 0)$ .
- 3.34.  $2a=14, 2b=10, F_1(-2\sqrt{6}; 0), F_2(2\sqrt{6}; 0)$ .
- 3.35.  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ . 3.36.  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ .
- 3.37. 0,0167. 3.38. 0,0045. 3.39.  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{16\sqrt{3}} = 1$ .
- 3.40.  $\varepsilon=0,6$ . 3.41.  $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$ . 3.42.  $S=24$  кв. ед.
- 3.43.  $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$ . 3.44.  $4\sqrt{3}$ . 3.45. 3 и 7.
- 3.46.  $x=3 \cos t$  и  $y=2 \sin t$ . 3.47.  $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{16} = 1$ .
- 2.43.  $y=\frac{3}{5}x-3\sqrt{2}$  и  $y=\frac{3}{5}x+3\sqrt{2}$ .
- 3.49.  $(4; -5)$ . 3.50.  $(0; -5)$  и  $(0; 5)$ .
- 3.51.  $3x-y-12=0$ . 3.52.  $\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{144} = 1$ .
- 3.53.  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{14} = 0$ . 3.54.  $(-6; 0)$  и  $(6; 0)$ .
- 3.55. 1)  $a=4, b=3$ ; 2)  $a=\frac{1}{4}, b=1$ ; 3)  $a=3, b=1$ ; 4)  $a=\frac{1}{4}, b=\frac{1}{3}$ ; 5)  $a=2, b=2$ ; 6)  $a=4, b=3$ .

3.56. 1) 4 и 3; 2)  $(-5; 0)$  и  $(5; 0)$ ; 3)  $(4; 0)$ ,  $(-4; 0)$ ;  
4)  $y = \pm \frac{3}{4}k$ .

3.57. 1)  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ ; 2)  $\frac{x^2}{28} - \frac{y^2}{36} = 1$ ; 3)  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ ; 4)  $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$ ; 5)  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ ; 6)  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ .

3.58.  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 0$ . 3.59.  $x = -5$  и  $x = 5$ .

3.60.  $y = \pm \frac{3}{4}x$ . 3.61.  $y = \pm x$ .

3.62.  $F_1(-5; 0)$ ,  $F_2(5; 0)$ ,  $(-4; 0)$ ,  $(4; 0)$ ,  $y = \pm \frac{3}{4}x$ .

3.63.  $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{24} = 1$ . 3.64.  $a = b$ .

3.65.  $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$ . 3.66.  $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{20} = 1$ .

3.67. 1) Нет; 2)  $(4; 0)$  и  $(5; \frac{9}{4})$ ; 3)  $(5; \frac{9}{4})$  — точка касания.

3.68.  $\frac{x^2}{28} - \frac{y^2}{36} = 1$ . 3.69.  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ .

3.70.  $y = 2x \pm \sqrt{3}$ . 3.71. Гипербола. 3.72.  $y^2 = 16x$ .

3.73.  $y^2 = 1,8x$ . 3.74.  $(\frac{11}{4}; \frac{\sqrt{55}}{2})$ ,  $(\frac{11}{4}; -\frac{\sqrt{55}}{2})$ .

3.75.  $y^2 = 16x$ . 3.76.  $y^2 = 4x$ ;  $\alpha \approx 37^\circ$ .

3.77. 1)  $(0; 0)$ ,  $(4; 4)$ ; 2)  $(0; 0)$ ,  $(4; -4)$ ; 3)  $(4; 4)$ ; 4)  $(1; 2)$ ,  
 $(\frac{1}{9}; \frac{2}{3})$ .

3.78.  $x - 2y + 6 = 0$ .

3.79.  $(x-2)^2 + y^2 = 16$ ;  $(2; 4)$ ,  $(2; -4)$ .

3.80.  $\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{4} = 1$ . 3.81.  $x'^2 - y'^2 = 4$ . 3.82.  $y'^2 = 3x'$ .

3.83. 1)  $\sqrt{5}$  и  $2\sqrt{3}$ ;  $(-\sqrt{5}; 0)$ ,  $(\sqrt{5}; 0)$ ,  $(0; -2\sqrt{3})$ ,  
 $(0; 2\sqrt{3})$ ;  $F_1(0; -\sqrt{7})$ ,  $F_2(0; \sqrt{7})$ ; 2) 4 и 3;  $(-3; 0)$ ,  $(3; 0)$ ,  
 $(0; -4)$ ,  $(0; 4)$ ;  $F_1(0; -\sqrt{7})$ ,  $F_2(0; \sqrt{7})$ ; 3) 3 и  $\frac{3}{2}$ ;  $(-\frac{3}{2}; 0)$ ,  
 $(\frac{3}{2}; 0)$ ,  $(0; -3)$ ,  $(0; 3)$ ;  $F_1(0; -\frac{3\sqrt{3}}{2})$ ,  $F_2(0; \frac{3\sqrt{3}}{2})$ .

3.84. 1)  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ ; 2)  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{36} = 1$ ; 3)  $\frac{x^2}{28} + \frac{y^2}{64} = 1$ ; 4)  $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{100} = 1$ .

3.85.  $\frac{x^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{25} = 1$ .

- 3.86.  $\left(-\frac{\sqrt{21}}{2}; 2\right), \left(\frac{\sqrt{21}}{2}; 2\right), \left(-\frac{\sqrt{21}}{2}; -2\right), \left(\frac{\sqrt{21}}{2}; -2\right).$
- 3.87.  $\frac{(x-5)^2}{8} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1.$
- 3.88. 1)  $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{9} = 1$  или  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$ ; 2)  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = -1$ ;
- 3)  $\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{576} = -1$ ; 4)  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = -1.$
- 3.89. 1) 3 и 4; 2)  $(0; -4), (0; 4)$ ; 3)  $F_1(0; -5), F_2(0; 5)$ ;
- 4)  $y = \pm \frac{3}{4}x.$
- 3.90.  $\frac{(x-3)^2}{144} - \frac{(y-2)^2}{25} = 1.$
- 3.91.  $\frac{(x-3)^2}{25} - \frac{(y-2)^2}{16} = 1$  или  $\frac{(x-3)^2}{16} - \frac{(y-2)^2}{25} = 1.$
- 3.92. 1)  $x^2 = 8y$ ; 2)  $x^2 = -12y$ ; 3)  $y^2 = 6x$ ; 4)  $y^2 = -10x.$
- 3.93.  $x^2 = -12y.$  3.94.  $y^2 = -24x.$
- 3.95.  $(y-5)^2 = 8(x+4), y = 5, x = -6.$
- 3.96.  $(y+4)^2 = -4(x+2), (-6; 0).$
- 3.97.  $(4; 2)$  и  $(-4; 2).$  3.99.  $x^2 = y.$
- 3.100.  $y^2 + 9x - 36 = 0.$  3.101.  $x^2 = 5y; y + 1,25 = 0.$
- 3.102.  $2x - 3y - 2 = 0.$  3.103.  $90y = x^2.$
- 3.104. 1) эллипс; 2) гипербола; 3) парабола; 4) парабола;
- 5) пара пересекающихся прямых; 6) пара параллельных прямых;
- 7) точка; 8) окружность; 9) эллипс.

#### Глава 4

- 4.3. Нет. 4.5. 6. 4.6. 4.
- 4.8. 1) Да; 2) нет; 3) нет; 4) да. 4.9. 10 см.
- 4.10.  $\frac{3a}{2} \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}} + \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}; \quad 2a \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}} + a^2;$
- $3a \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}} + \frac{3 \sqrt{3}}{2} a^2.$
- 4.13.  $\frac{a+b}{2}.$  4.15.  $DD_1 = a + c - b.$
- 4.16. 1)  $55^\circ$ ; 2)  $51^\circ$ ; 3)  $\frac{\pi}{3}.$  4.21.  $\frac{bc}{a+c}.$
- 4.23. а. 4.24. Да. 4.28.  $\frac{a^2 \sqrt{3}}{36}.$
- 4.29.  $2c(a+b)$ ; нет. 4.30. 4 см, 8 см, 12 см.
- 4.31.  $\frac{a^2 \sqrt{3}}{2}.$  4.32.  $\frac{1}{2} \sqrt{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}.$
- 4.36. 4 см. 4.37.  $\frac{3a \sqrt{2}}{2}$  см. 4.38.  $\approx 3,5$  см.

$$4.42. \frac{h}{\cos \varphi}, h \operatorname{tg} \varphi. 4.43. 12,5 \text{ см}, 25 \text{ см}. 4.44. 60^\circ.$$

$$4.45. 10 \text{ см}. 4.46. 45^\circ. 4.47. 2a; a \sqrt{5}. 4.48. \frac{H^2 \sqrt{7}}{4}.$$

$$4.49. 1) 7 \text{ см}; 2) 11 \text{ дм}; 3) \sqrt{110} \text{ см}.$$

$$4.50. \approx 17,1 \text{ см}; \approx 20,1 \text{ см}. 4.51. 32 \text{ см}. 4.54. b \sqrt{\cos \alpha}.$$

$$4.55. 50 \text{ м}^2. 4.56. 11 \text{ м}. 4.57. 25 \text{ см}^2, 100 \text{ см}^2, 225 \text{ см}^2.$$

$$4.59. 3 \text{ см}. 4.60. \frac{3}{8} aH. 4.61. 2 \text{ см}.$$

$$4.62. \frac{3a^2H}{4\sqrt{a^2+3H^2}}. 4.63. 2 \text{ см}. 4.64. 65 \text{ см}.$$

$$4.65. 24 \text{ м}^2; 30^\circ. 4.68. \frac{3}{16} m^2. 4.69. 1,17 \sqrt{5} \text{ см}^2.$$

$$4.71. \text{Тетраэдр и куб}. 4.72. \text{Икосаэдр}.$$

$$4.73. 1) \arccos \frac{1}{3}; 2) 2 \arccos \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 109^\circ; 3) \approx 138^\circ.$$

## Глава 5

$$5.1. 1) \vec{AS}; 2) \vec{AB}.$$

$$5.3. 1) a+b+c; 2) a+c; 3) a; 4) -a+b; 5) b; 6) -c; 7) -a+b-c; 8) -\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c.$$

$$5.4. \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right); \left(-1; \frac{1}{2}\right); \left(\frac{1}{2}; -1\right).$$

$$5.5. 1) -i-j+\frac{1}{2}k; 2) -i+k; 3) \frac{1}{2}i-\frac{1}{2}j-k; 4) \frac{1}{2}i+\frac{1}{2}j; 5) -i; 6) i+j-k; 7) -j+k; 8) -\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}j+k.$$

$$5.6. \vec{AB}=(-4; 3; 0), \vec{BA}=(4; -3; 0), |\vec{AB}|=|\vec{BA}|=5, \frac{\vec{BA}}{|\vec{BA}|}=\left(\frac{4}{5}; -\frac{3}{5}; 0\right).$$

$$5.7. (-3; 0; \pm 2\sqrt{5}). 5.8. \sqrt{3}; \sqrt{11}. 5.9. 1) 0; 2) 3.$$

$$5.10. -\frac{3}{2}. 5.11. 5.$$

$$5.12. 1) 4; 2) -6; 3) \text{при любом } \alpha.$$

$$5.13. \alpha_1=-4, \beta_1=2 \text{ и } \alpha_2=-8, \beta_2=-2.$$

$$5.14. b_1=3\sqrt{2}i+3\sqrt{2}j; b_2=-4\sqrt{2}i-3\sqrt{2}j.$$

$$5.15. x=(2; -3; 0).$$

$$5.16. 1) b=i+0,5j-0,5k; 2) b=\left(-\frac{2}{9}; \frac{4}{9}; \frac{4}{9}\right).$$

$$5.17. 1) b=\frac{100}{7}i-\frac{150}{7}j-\frac{300}{7}k; 2) b=(-24; 32; 30).$$

- 5.18.  $x = (2; 3; -2)$ .  
 5.19.  $\cos \angle (a; i) = \frac{3}{13}$ ;  $\cos \angle (a; j) = -\frac{4}{13}$ ;  $\cos \angle (a; k) = \frac{12}{13}$ .  
 5.20.  $90^\circ$ . 5.21. 1)  $90^\circ$ ; 2)  $90^\circ$ ; 3)  $\approx 146^\circ$ . 5.22.  $90^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $45^\circ$ .  
 5.23.  $D(-1; 1; 1)$ ,  $\angle(\vec{AC}; \vec{BD}) = 120^\circ$ . 5.24.  $45^\circ$ .  
 5.25.  $90^\circ$ . 5.26.  $\cos \angle B = -\frac{1}{3}$ . 5.27. 13 ед. работы.  
 5.28. 1) Левая; 2) не левая и не правая, так как векторы компланарны; 3) правая.  
 5.29. 1)  $6k$ ; 2)  $-12j$ ; 3)  $7i - 2j - 5k$ .  
 5.30. 25 кв. ед.  
 5.31. 1)  $-4i + 7j + 6k$ ; 2)  $i + 2j + k$ ; 3)  $-3i + 4j + 2k$ ; 4)  $3i + 6j + 3k$ ; 5)  $-2i + 6j + 3k$ ; 6)  $4i - 2j - k$ ; 7)  $4i - 2j - 6k$ ; 8)  $5i + 10j + 5k$ ; 9)  $20i + 10j + 20k$ ; 10)  $20i + 10j + 15k$ .  
 5.32.  $7\sqrt{5}$  кв. ед.  
 5.33. 48 кв. ед.; 4,8 л. ед.; 9,6 л. ед.  
 5.34.  $\sqrt{429}$ . 5.35. 210. 5.38.  $4|(a; b; c)|$ . 5.40.  $-50$ .  
 5.41. Не компланарны; тройка правая. 5.42. Компланарны.  
 5.43. 27 куб. ед. 5.44.  $M = -2i - 3j + 6k$ ,  $|M| = 7$ .  
 5.45. 2 Н. 5.46. 1) Нет; 2) да. 5.47.  $3\sqrt{5}$  л. ед.

## Глава 6

- 6.1. 1)  $\begin{vmatrix} x+2 & y-3 & z-5 \\ 6 & -6 & -5 \\ 2 & 3 & -10 \end{vmatrix} = 0$ ,  $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{5} = 1$ ;  
 2)  $\begin{vmatrix} x-2 & y & z-4 \\ 1 & 1 & -6 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0$ ,  $\frac{x}{50} - \frac{y}{50} + \frac{z}{50} = 1$ ;  
 3)  $\begin{vmatrix} x-3 & y-1 & z+5 \\ 5 & 2 & 8 \\ -5 & -2 & 9 \end{vmatrix} = 0$ ,  $\frac{x}{1} - \frac{y}{1} = 1$ .  
 6.2. 1)  $2x + 3y - 13 = 0$ ; 2)  $4x - 6y + z - 40 = 0$ ; 3)  $7y - 4z = 0$ ;  
 4)  $y - 2 = 0$ .  
 6.3. 1)  $4x - 7z + 24 = 0$ ; 2)  $z + 11 = 0$ ; 3)  $7x - 2y + 7z - 37 = 0$ .  
 6.4.  $2y - z = 0$ . 6.5.  $x + 2z - 4 = 0$ .  
 6.6. 1) Параллельны и не совпадают; 2) перпендикулярны;  
 3) пересекаются, но не перпендикулярны; 4) совпадают.  
 6.7. 1)  $k = \frac{28}{3}$ ; 2)  $k = 0$ ; 3) при любом  $k$ .  
 6.8. 1)  $\alpha = -\frac{9}{4}$ ,  $\beta = \frac{16}{3}$ ; 2)  $\alpha = 0$ ,  $\beta = \frac{16}{3}$ ; 3)  $\alpha = 5$ ,  $\beta$  — любое число.  
 6.9.  $8x - 2y - 5z - 23 = 0$ . 6.10.  $2x + 3y + z - 11 = 0$ .  
 6.11.  $5y + 3z + 7 = 0$ . 6.12. 1)  $45^\circ$ ; 2)  $90^\circ$ ; 3)  $\approx 70^\circ$ ; 4)  $60^\circ$ .  
 6.13. 1)  $\vec{AM} = t(r_1 + r_2 + r_3)$ ; 2)  $\vec{CM} = t(r_1 + r_2 - r_3)$ ; 3)  $\vec{BM} = t(-r_1 + r_2 + r_3)$ ; 4)  $\vec{DM} = t(r_1 - r_2 + r_3)$ ; 5)  $\vec{CM} = t(r_1 - r_3)$ ,  $t \in R$ .

$$6.14. 1) \begin{cases} x=1+2t, \\ y=2-2t, \\ z=3+t; \end{cases} 2) \begin{cases} x=3+t, \\ y=-2-t, \\ z=\sqrt{2}t; \end{cases} 3) \begin{cases} x=\frac{1}{2}, \\ y=\frac{1}{3}+3t, \\ z=\frac{1}{4}+5t. \end{cases}$$

$$6.15. 1) \frac{x+2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-1}{4}; 2) \frac{x-2}{\sqrt{3}} = \frac{y+1}{\sqrt{2}} = \frac{z}{1}; 3) \frac{x-3}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{0}.$$

$$6.16. 1) \frac{x-3}{5} = \frac{y+1}{4} = \frac{z}{-4}; 2) \frac{x-4}{3} = \frac{y+1}{0} = \frac{z-2}{-2}; 3) \frac{x}{2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z+5}{0}.$$

$$6.17. \begin{cases} x=-7+8t, \\ y=11-9t, \\ z=6-12t; \end{cases} \frac{x+7}{8} = \frac{y-11}{-9} = \frac{z-6}{-12}.$$

$$6.18. \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{7} = \frac{z}{4}.$$

$$6.19. 1) \frac{x-\frac{1}{3}}{0} = \frac{y+\frac{7}{3}}{-3} = \frac{z}{-3}; 2) \frac{x-\frac{3}{2}}{0} = \frac{y+5}{0} = \frac{z}{2}; 3) -x = y = z; 4) \frac{x+\frac{3}{11}}{0} = \frac{y-\frac{15}{11}}{0} = \frac{z}{11}; 5) \frac{x}{7} = \frac{y}{0} = \frac{z}{0}; 6) \frac{x-\frac{1}{3}}{0} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-6}.$$

$$6.20. \frac{x}{0} = \frac{y}{4} = \frac{z-\frac{11}{4}}{-3}; \frac{x}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z-\frac{11}{4}}{1}; \frac{x}{3} = \frac{y-\frac{11}{3}}{2} = \frac{z}{0}.$$

$$6.21. 1) \begin{cases} x=2+2t, \\ y=-1+7t, \\ z=4t; \end{cases} 2) \begin{cases} x=3+t, \\ y=2+2t, \\ z=t. \end{cases}$$

$$6.22. 2x+15y+7z+7=0. 6.23. 5x+5z-8=0.$$

$$6.24. 1) \text{ Не лежат; } 2) \text{ лежат; } 3) \text{ лежат; } 4) \text{ не лежат.}$$

$$6.25. 1) \text{ Да; } 2) \text{ нет.}$$

$$6.26. 1) \text{ Перпендикулярны; } 2) \text{ параллельны; } 3) \text{ параллельны; } 4) \text{ перпендикулярны.}$$

$$6.27. \alpha=2. 6.28. \frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-4}{-5}.$$

$$6.29. 1) \text{ Да; } 2) \text{ нет. } 6.30. \frac{x}{0} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-2}.$$

$$6.31. 1) 60^\circ; 2) 90^\circ; 3) \approx 79^\circ.$$

$$6.32. 1) \text{ Параллельны, прямая не лежит в плоскости; } 2) \text{ параллельны, прямая не лежит в плоскости; } 3) \text{ пересекаются в точке } (0; 0; -2), \text{ не перпендикулярны; } 4) \text{ перпендикулярны, пересекаются в точке } (-2; 4; 4); 5) \text{ прямая лежит в плоскости.}$$

$$6.33. \frac{x-2}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-1}. \quad 6.34. 11x+9y+7z-235=0.$$

$$6.35. \alpha = -13, \beta = 2. \quad 6.36. 1) 30^\circ; 2) \approx 65^\circ; 3) 0^\circ.$$

$$6.37. \begin{cases} 3x+2y-z-5=0, \\ x-8y-13z+9=0. \end{cases}$$

$$6.38. \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{0}, \quad \frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z+2}{1}, \quad \frac{x}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{1}.$$

$$6.39. 1) \frac{7}{6}; 2) 4; 3) 16. \quad 6.40. 1) 3; 2) \frac{11}{3}; 3) 14.$$

$$6.41. \frac{6}{\sqrt{29}}. \quad 6.42. 1) \frac{75}{14}; 2) \frac{15\sqrt{38}}{76}; 3) 0.$$

## Глава 7

$$7.1. \frac{\pi S}{4}. \quad 7.2. 3 \text{ см.} \quad 7.3. \sqrt{R^2 - \frac{S^2}{4H^2}}.$$

$$7.4. \frac{1}{2} \sqrt{d^2 - H^2}. \quad 7.5. 2 \operatorname{arctg} \frac{3\pi}{10}. \quad 7.6. \frac{\pi}{4}.$$

$$7.7. 5 \text{ см.} \quad 7.8. 500 \text{ см}^2. \quad 7.9. 12,25 \text{ см}^2.$$

$$7.10. \operatorname{arctg} \frac{\pi S}{4Q}. \quad 7.11. \sqrt{2} \text{ см.} \quad 7.12. 5 \text{ см.}$$

$$7.13. 4\sqrt{3} \text{ см.} \quad 7.14. 1) 9 \text{ см}^2; 2) \left( \frac{\sqrt{S} + \sqrt{Q}}{2} \right)^2. \quad 7.15. 16\pi \text{ м}^2.$$

$$7.16. 1) \approx 12\,740\pi \text{ км}; 2) \approx 15\,930 \text{ км}; 3) \approx 7124\pi \text{ км.}$$

$$7.17. \approx 27 \text{ см.} \quad 7.18. 4\pi \text{ м.}$$

$$7.19. 1) \frac{a}{2}; 2) \frac{a\sqrt{6}}{12}; 3) \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

$$7.20. 1) \frac{a\sqrt{3}}{2}; 2) \frac{a\sqrt{6}}{4}; 3) \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$7.21. \frac{4}{3} \text{ см.} \quad 7.22. r = \frac{b}{2} \sqrt{\frac{1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}}; \quad R = \frac{b}{4 \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{\cos \alpha}}.$$

$$7.23. \sqrt{2}:1. \quad 7.24. \frac{\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{\sin 2\alpha}.$$

$$7.25. x^2 + y^2 + z^2 = 36. \quad 7.26. x^2 + y^2 + z^2 = 9.$$

7.27. Точка  $A$  лежит внутри сферы; точка  $B$  — на сфере; точка  $C$  — вне сферы.

$$7.28. 1) (0; 1; -3), R=9; 2) (2; -4; 1), R=6\sqrt{2}.$$

$$7.30. 1) \text{ Точка; } 2) \text{ окружность } x^2 + z^2 = \frac{3}{4}, y = \frac{1}{2}; 3) \text{ пустое}$$

множество.

$$7.31. \text{ Окружность } x^2 + y^2 = 9, z = 1.$$

$$7.32. \text{ Центр окружности в точке } (1; 2; -1), R = 3.$$

$$7.33. (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 16, C(2; 3; 4).$$

$$7.34. (x-4)^2 + (y-1)^2 + (z-2,5)^2 = 49,25.$$



$$7.35. x^2 + y^2 + z^2 = 93. \quad 7.36. (-5; 2; 5).$$

$$7.37. (x-8)^2 + (y+5)^2 + (z-5)^2 = 44.$$

$$7.38. \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{14} + \frac{z^2}{25} = 1. \quad 7.39. \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{36} = 1.$$

$$7.40. \frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} - \frac{z^2}{36} = 1. \quad 7.41. \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1.$$

$$7.42. x^2 + y^2 = 6z. \quad 7.43. x^2 + y^2 = 9.$$

$$7.44. 9x^2 - 4y^2 - 4z^2 = 0. \quad 7.45. \frac{(x-z)^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

7.46. 1) Круговая коническая поверхность с вершиной в точке  $(0; 0; 0)$ ; 2) цилиндрическая поверхность, направляющая которой — пара пересекающихся прямых; образующие параллельны вектору  $(1; 0; 0)$ ; 3) эллиптическая цилиндрическая поверхность с образующими, параллельными оси  $Oz$ ; 4) гиперболическая цилиндрическая поверхность с образующими, параллельными оси  $Oy$ ; 5) параболоническая цилиндрическая поверхность с образующими, параллельными оси  $Oz$ ; 6) эллипсоид вращения с центром в точке  $(1; 0; 0)$ ; 7) параболоид вращения с осью вращения  $y=0, z=0$ .

$$7.47. x = \frac{1}{2}, y = 0. \quad 7.48. \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 0.$$

7.49. Двуполостный гиперболоид вращения, по гиперболу.

7.50. Однополостный гиперболоид вращения, по гиперболу.

7.51. Параболоид вращения, по парболе.

$$7.52. \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 0.$$

## Глава 8

$$8.1. V_1 + 0,5V_2. \quad \text{Указание. } V(K_1 \cup K_2) = V(K_1) + V(K_2) -$$

$$-V(K_1 \cap K_2).$$

$$8.2. 2358,72 \text{ см}^3. \quad 8.3. 1. \quad 8.4. 0,5V.$$

$$8.5. 0,5V. \quad 8.6. \frac{l^3}{3\sqrt{3}}. \quad 8.7. a^3 \sqrt{l^2 - 2a^2}.$$

$$8.9. 105 \text{ см}^3. \quad 8.10. 216\sqrt{2} \text{ см}^3 \approx 306 \text{ см}^3.$$

$$8.11. \frac{l^3 \sqrt{2}}{8}. \quad 8.12. \frac{a^3 \sqrt{3}}{2}. \quad 8.13. 3\sqrt{3} \text{ м}^3 \approx 5,2 \text{ м}^3.$$

$$8.14. 3360 \text{ см}^3. \quad 8.15. 144 \text{ см}^3.$$

$$8.16. 360 \text{ см}^3. \quad 8.17. 312 \text{ см}^3. \quad 8.18. \frac{a^3 \sqrt{3}}{2}.$$

$$8.19. 8 \text{ м}^2. \quad 8.20. \frac{2a}{3} \text{ и } \frac{a}{6}. \quad 8.21. 57,6 \text{ см}^3.$$

$$8.22. 3 \text{ см}. \quad 8.23. 32 \text{ м}, 34 \text{ м}. \quad 8.24. 6 \text{ м}^3.$$

$$8.25. \frac{a^3 \sqrt{2}}{8}. \quad 8.26. \frac{a^3 \sqrt{3}}{4 \sin \alpha} \sqrt{\cos(30^\circ - \alpha) \cos(30^\circ + \alpha)}.$$

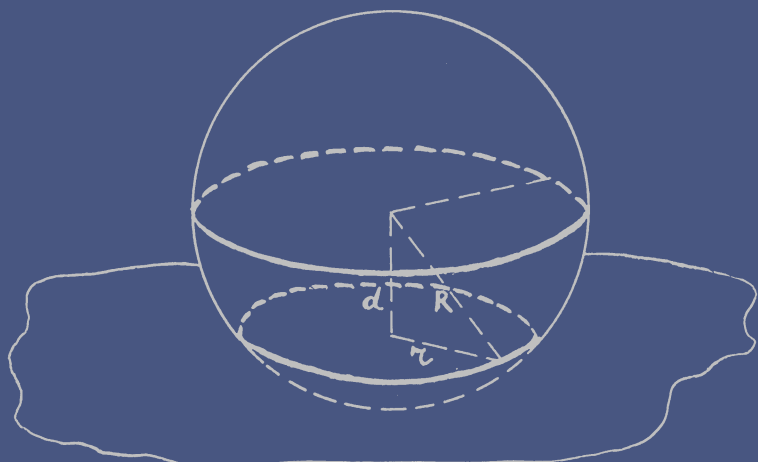
$$8.27. 12\sqrt{7} \text{ см}^3 \approx 31,7 \text{ см}^3. \quad 8.28. \frac{75\sqrt{3}}{4} \text{ см}^3 \approx 32,5 \text{ см}^3.$$

$$8.29. \frac{1}{2} Q \sqrt{S \sin 2\alpha}. \quad 8.30. Q \sqrt{\frac{Q}{3}}. \quad 8.31. 16\pi \text{ см}^3.$$

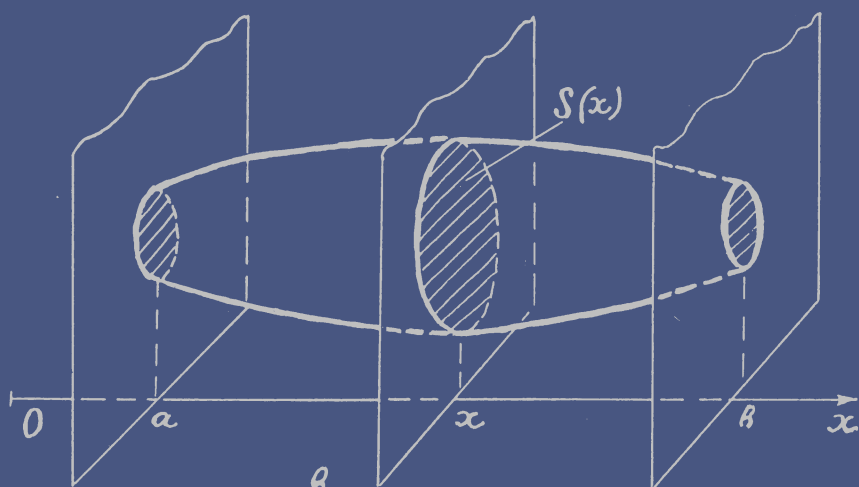
$$8.32. 128\pi \sqrt{3} \text{ см}^3. \quad 8.33. CS. \quad 8.34. \frac{N}{2} \sqrt{\pi M}.$$

8.35.  $\frac{\pi d S}{\sin \alpha}$ . 8.36.  $\approx 1,9$  кг. 8.37.  $1300 \text{ м}^3$ ; 7,5 %.  
 8.38.  $192 \text{ см}^3$ . 8.39.  $2\sqrt{3} \text{ м}^3 \approx 3,5 \text{ м}^3$ .  
 8.41.  $\frac{a^3 \sqrt{\cos \alpha}}{6 \sin \frac{\alpha}{2}}$ ,  $\alpha < \frac{\pi}{2}$ . 8.42.  $\frac{a^3}{6} \sin^2 \alpha \operatorname{tg} \varphi$ .  
 8.43.  $\frac{1}{3} a^2 h \sin \alpha$ . 8.44.  $\frac{1}{3} h^2 H \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ .  
 8.45.  $1900 \text{ м}^3$ . 8.46.  $\approx 2,6 \cdot 10^6 \text{ м}^3$ . 8.47.  $\approx 1,7 \text{ см}$ .  
 8.48.  $\frac{\sqrt{2}}{3} abc$ . 8.49.  $2100 \text{ см}^3$ .  
 8.50.  $\frac{1}{2} (a^3 - b^3) \operatorname{tg} \alpha$ . 8.51.  $\frac{a^3 - b^3}{6 \cos \alpha} \sqrt{-\cos 2\alpha}$ ,  $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ .  
 8.52. 1)  $\frac{\pi^2}{2}$ ; 2)  $12\pi$ ; 3)  $1,6\pi$ ; 4)  $\frac{272}{15} \pi$ ; 5)  $\frac{\pi^2}{12}$ ; 6)  $0,3\pi$ ; 7)  $\frac{\pi}{4}$ ;  
 8)  $\frac{(a+3)a^2\pi}{3}$ .  
 8.53.  $\pi\sqrt{3} \text{ см}^3$ . 8.54.  $9\pi\sqrt{3} \text{ см}^3$ . 8.55.  $3\pi\sqrt{3} \text{ см}^3$ .  
 8.56.  $18\pi\sqrt{3} \text{ см}^3$ . 8.57.  $\frac{2\pi d^3}{3 \sin 2\varphi \sin \varphi \cos^2 \frac{\alpha}{2}}$ .  
 8.58.  $320\pi \text{ см}^3$ . 8.59.  $4,5\pi\sqrt{2} \text{ см}^3$ . 8.60.  $448\pi \text{ дм}^3$ .  
 8.61.  $\frac{2}{3} \pi S \sqrt{S \sin 2\alpha}$ . 8.62.  $\frac{1}{12} \pi a^3 \operatorname{tg}^2 \alpha$ .  
 8.63.  $\frac{4}{3} \pi S \sqrt{S \sin 2\alpha}$ . 8.64.  $\frac{1}{3} \pi b^3 \sin^2 \beta$ .  
 8.65.  $\approx 19 \text{ т}$ . 8.66.  $\approx 1,6 \text{ м}$ . 8.67.  $182\pi \text{ дм}^3$ .  
 8.68.  $10500\pi \text{ см}^3$ . 8.69.  $1946\pi \text{ см}^3$ .  
 8.70.  $2\pi a^3 \sin \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2}$ . 8.71.  $\pi d^3 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ .  
 8.72. 2 %. 8.73. Объем шара больше.  
 8.74. Масса шара меньше. 8.75. 3:1.  
 8.76. 20:7. 8.77. 5:27. 8.78.  $\frac{166912}{3} \pi \text{ см}^3$ .  
 8.79.  $\frac{\pi}{3} R^3$ . 8.80.  $\frac{4}{3} \pi R^3 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ . 8.81.  $4\sqrt{3} \pi \text{ дм}^3$ .  
 8.82. 3:1. 8.83.  $\frac{\sqrt{3}}{2} \pi \text{ м}^3$ . 8.84.  $\frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{54} \operatorname{tg}^3 \frac{\varphi}{2}$ .  
 8.85.  $\frac{3V\sqrt{2}}{8\pi} \sin 2\alpha$ . 8.86.  $\frac{2}{3} \pi R^3 \sin^2 2\alpha \cos^2 \alpha$ .  
 8.87.  $\frac{4}{3} R^3 \sin^2 2\varphi \sin^2 \varphi \sin 2\alpha$ . 8.88.  $\frac{\pi}{6} a^3 \left( \frac{3 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1}{\sqrt{3} + 3 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}} \right)^3$ .  
 8.89.  $\frac{S}{3} \sqrt{\frac{S}{\pi}} \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg}^3 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)$ .

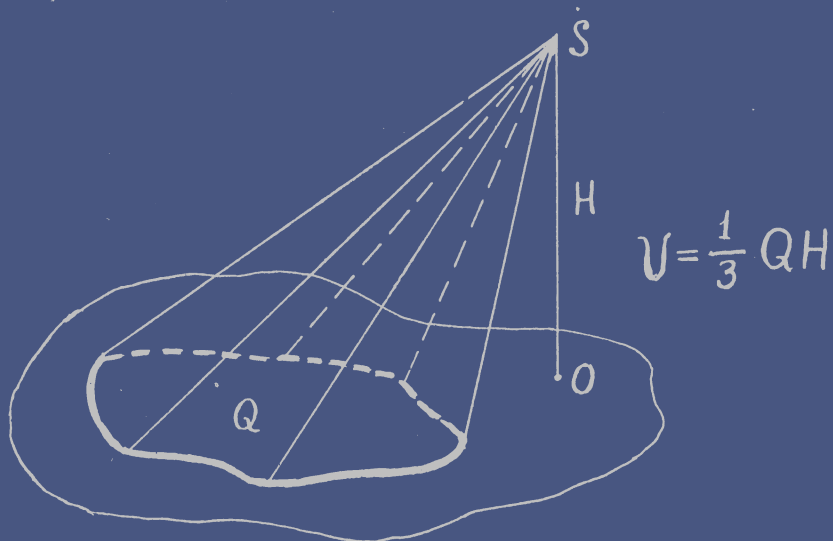
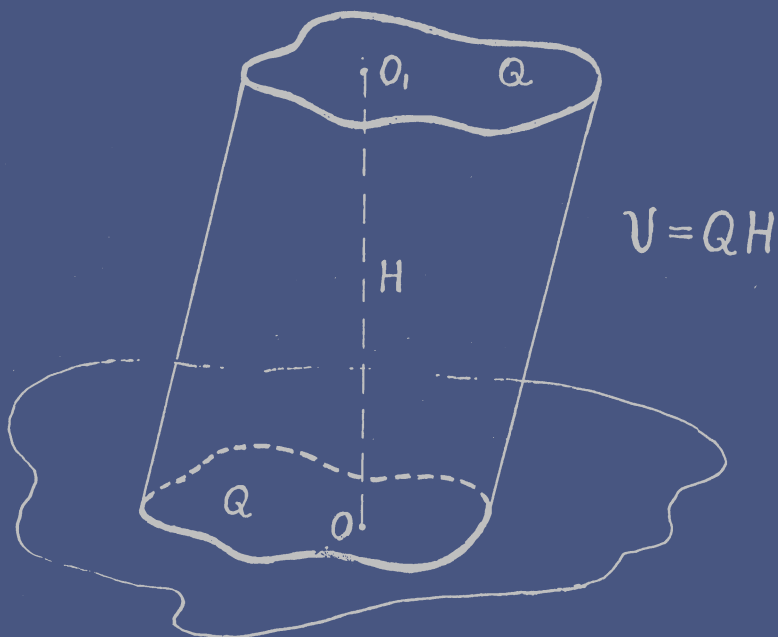
- 8.90.  $\frac{r^3}{3} \operatorname{ctg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta$ . 8.91.  $240 \text{ см}^3$ .
- 8.92.  $252\sqrt{3} \text{ дм}^3 \approx 436,5 \text{ дм}^3$ . 8.93.  $2a^3 \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{\sin \frac{3\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2}}$ .
- 8.94.  $\frac{ab\sqrt{12a^2-3b^2}}{8}$ . 8.95.  $\approx 14,9 \text{ дм}^3$ .
- 8.96.  $18\sqrt{39} \text{ см}^3 \approx 112 \text{ см}^3$ . 8.97.  $abc\sqrt{-\cos 2\alpha}$ ,  $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ .
- 8.98.  $4 \text{ см}$ ,  $8 \text{ см}$ ,  $12 \text{ см}$ . 8.99.  $188 \text{ м}^2$ .
- 8.100.  $\approx 260 \text{ м}^2$ . 8.101.  $45 \text{ см}^2$ .
- 8.102. 1)  $3ab + \frac{\sqrt{3}}{2}a^2$ ; 2)  $4ab + 2a^2$ ; 3)  $6ab + 3\sqrt{3}a^2$ .
- 8.104. Тетраэдр и куб. 8.105. Икосаэдр.
- 8.106.  $\frac{1}{3}S\sqrt{2\sqrt{3}S}$ . 8.107.  $256 \text{ см}^2$ . 8.108.  $124,4 \text{ см}^3$ .
- 8.109. 1)  $\frac{\sqrt{3}}{4}a(a + \sqrt{a^2 + 12H^2})$ ; 2)  $a^2 + a\sqrt{a^2 + 4H^2}$ ;
- 3)  $\frac{3}{2}a(\sqrt{3}a + \sqrt{3a^2 + 4H^2})$ .
- 8.110.  $168 \text{ см}^2$ . 8.111.  $5600 \text{ см}^3$ .
- 8.112.  $4 \text{ м} \times 4 \text{ м} \times 2 \text{ м}$ ,  $1200$ . 8.113.  $\pi Q$ .
- 8.114.  $\frac{l^2}{2\pi}(\cos^2 \alpha + \pi \sin 2\alpha)$ .
- 8.115.  $25\sqrt{3}\pi \text{ см}^2 \approx 136 \text{ см}^2$ ,  $(25\sqrt{3} + 12,5)\pi \text{ см}^2 \approx 175 \text{ см}^2$ .
- 8.116.  $\approx 35 \text{ тыс. м}^2$ . 8.117.  $\pi H^2 \operatorname{ctg} \varphi$ .
- 8.118.  $2\pi h^2 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$ . 8.119.  $12\pi a^2$ .
- 8.120.  $\pi l^2 \sin \frac{\varphi}{2}$ ,  $\pi l^2 \sin \frac{\varphi}{2} \left( 1 + \sin \frac{\varphi}{2} \right)$ .
- 8.121.  $\pi l \sqrt{\frac{P}{\pi}}$ ,  $\pi l \sqrt{\frac{P}{\pi}} + P$ . 8.122.  $\approx 40 \text{ листов}$ .
- 8.123.  $\frac{1}{2}\pi a^2(3 + \sqrt{3})$ . 8.124.  $\frac{\pi b^2 \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}}{2 \sin \frac{\varphi}{2}}$ .
- 8.125.  $2\pi a(a + b) \sin \alpha$ .
- 8.126. 1)  $\frac{61\pi}{1728}$ ; 2)  $\frac{2\pi p^2}{3}(2\sqrt{2} - 1)$ ; 3)  $2\pi(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}))$ ;
- 4)  $4\pi^2 ab$ ; 5)  $\frac{12}{5}\pi a^2$ ; 6)  $\pi$ ; 7)  $\frac{128}{5}\pi$ .
- 8.127.  $25\pi \text{ м}^2$ . 8.128.  $\frac{41}{16}\pi a^2$ .
- 8.129.  $400\pi \text{ м}^2$ ,  $1100\pi \text{ м}^2$ . 8.130.  $3R$ .
- 8.131.  $\approx 11,5 \text{ млн. км}^2$ . 8.132.  $2,3\%$  и  $1,3\%$ .



$$r^2 = R^2 - d^2$$



$$V = \int_a^b S(x) dx$$



Цена 75 коп.